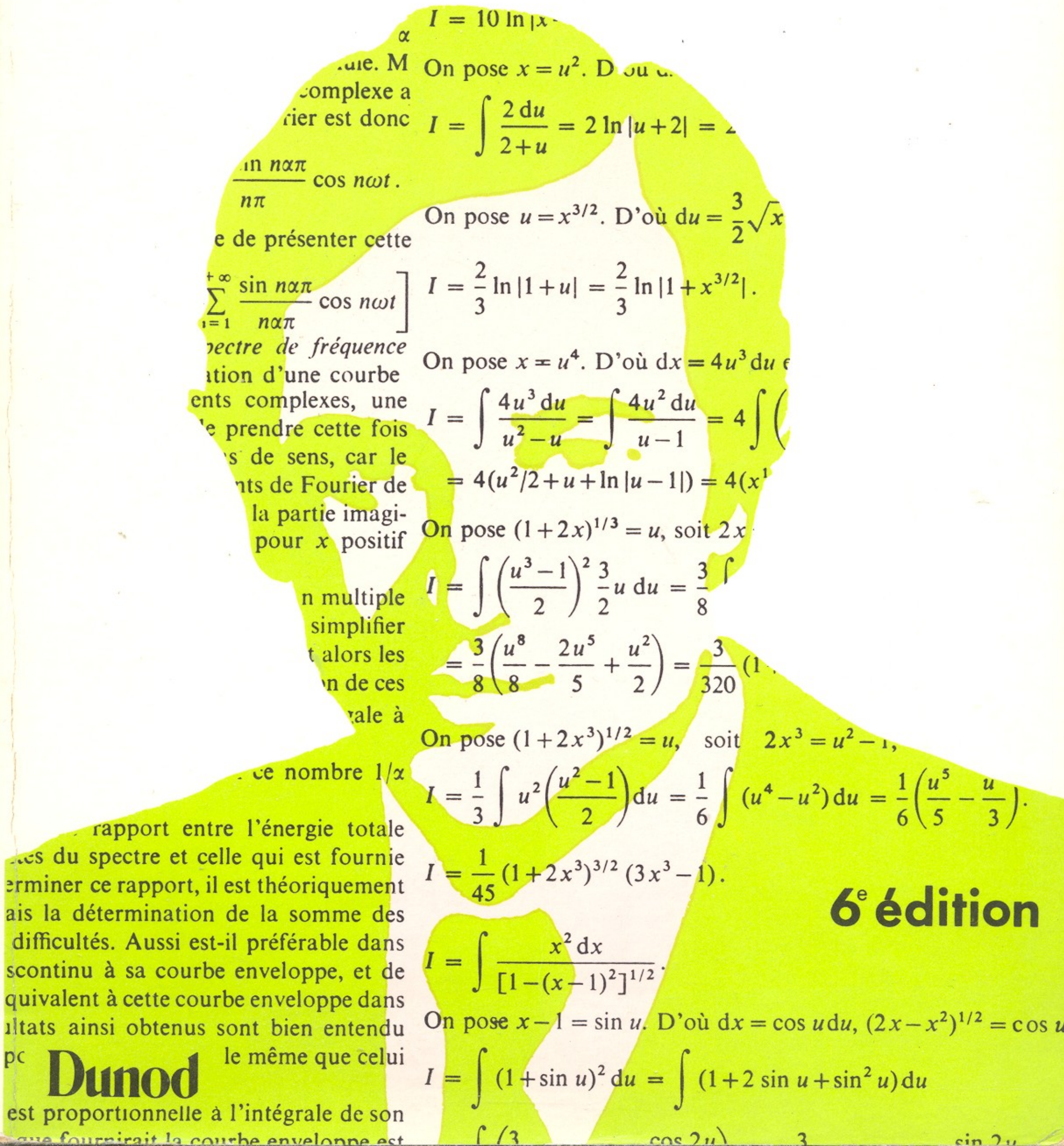
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

3 - Calcul intégral et séries



6e édition

Dunod

J. QUINET
Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Tome 3
Calcul intégral et séries

6[e] édition corrigée
par une équipe de professeurs
Avec la participation de

J. FAZEKAS
Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris

Dunod

ISBN 2-04-006021-9

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 7. **Séries numériques**

CHAPITRE 8. **Séries entières**

CHAPITRE 9. **Séries de Fourier**

CHAPITRE 1

PROCÉDÉS PRATIQUES DE CALCUL DES PRIMITIVES

1.1 Préliminaires. Dans ce chapitre et les deux suivants, nous indiquons de nombreux procédés de calcul des primitives.

Nous avons déjà remarqué que, dans quelques cas, la dérivation des fonctions simples nous fournit immédiatement des primitives. On complète le tableau des primitives (obtenu à partir du tableau des dérivées) à l'aide des résultats du chapitre précédent. Ainsi, la dérivée de la fonction ln est $x \mapsto 1/x$; mais, si x est strictement négatif, la règle de dérivation d'une fonction composée montre que la dérivée de $x \mapsto \ln(-x)$ est encore $x \mapsto 1/x$. Donc, dans tous les cas, on peut écrire

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

De même, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ apparaît comme la dérivée de la fonction argument tangente hyperbolique, tout au moins sur l'intervalle $]-1, 1[$; mais

$$\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

et cette dernière expression est une primitive de f sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

On trouvera le tableau des primitives, ainsi complété par quelques formules d'usage courant, en page 253. Bien entendu, comme le tableau des dérivées usuelles, *le tableau des primitives usuelles est à savoir par cœur!* Aucune connaissance théorique ne peut remplacer un effort de mémoire.

En pratique, on ramène le calcul des primitives au cas des fonctions figurant dans le tableau des primitives à l'aide des procédés suivants:

— changement de variable;
— intégration par parties;
— décomposition en combinaison linéaire de fonctions plus simples.

1.2 Changement de variable. La méthode du changement de variable dans les intégrales s'applique bien entendu au cas des intégrales fonctions de leur borne supérieure; par suite, on peut l'employer dans le calcul des primitives.

EXEMPLES

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

L'élément différentiel ressemble à $\cos u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}(\sin u)$. Pour nous ramener à ce cas simple, posons $u = 3x$, d'où $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/3$ et

$$I = \int \cos u \frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int \cos u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\sin u = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

L'élément différentiel ressemble à $\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$. Puisque $\mathrm{d}x$ n'est pas la différentielle de $-2x$, posons $u = -2x$, d'où $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/2$ et

$$I = \int \mathrm{e}^u\left(-\frac{\mathrm{d}u}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^u = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}.$$

3. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x}}$.

L'élément différentiel est de la forme $\mathrm{d}u/\sqrt{u}$; posons

$$1-4x = u, \quad \text{d'où} \quad -4\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/4.$$

Alors

$$I = \int \frac{-\mathrm{d}u/4}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}2\sqrt{u} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}.$$

4. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2}$.

L'élément différentiel est de la forme $\mathrm{d}u/u$; posons $u = 5x-2$, d'où $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/5$ et

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u/5}{u} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| = \frac{1}{5}\ln|5x-2|.$$

5. *Calculer* $I = \displaystyle\int (3x^2+4)^3\,x\,\mathrm{d}x$.

Posons $u = 3x^2+4$; alors $6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et $x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/6$. D'où :

$$I = \int u^3\frac{\mathrm{d}u}{6} = \frac{1}{6}\int u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{6}\frac{u^4}{4} = \frac{1}{24}(3x^2+4)^4.$$

6. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$,

où a est un nombre réel strictement positif.

Pour nous ramener au tableau des primitives, posons $x = ay$; alors

$$I = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,tg}\,y = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{a}.$$

Ce résultat, d'usage très fréquent, doit être su par cœur. D'ailleurs... il figure déjà dans le tableau des primitives!

Calculons par exemple

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{5+3x^2}.$$

En mettant 1/3 en facteur, nous nous ramenons à la forme précédente :

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5/3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{5}}\,x = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{5}}\,x.$$

7. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Puisque $\mathrm{d}x/x = \mathrm{d}(\ln x)$, posons $u = \ln x$; alors

$$I = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

1.3 Utilisation de l'intégration par parties. Soient u et v deux fonctions continûment dérivables; la relation

$$(uv)' = u'v + uv',$$

ou encore

$$\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v,$$

montre que

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, lorsqu'une primitive se présente sous la forme $\int u\,\mathrm{d}v$, la formule précédente montre que l'on peut se ramener au calcul de $\int v\,\mathrm{d}u$; *il se peut que cette nouvelle primitive soit plus facile à calculer que la première.* Dans le cas contraire, on peut essayer d'intervertir les rôles de u et de v, et recommencer le calcul.

Ce procédé s'applique pour calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) produit d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle;
b) produit d'une fonction polynomiale par un sinus ou par un cosinus;
c) produit d'une exponentielle par un sinus ou par un cosinus;
d) produit d'une fonction polynomiale par une fonction logarithme;

e) fonctions trigonométriques réciproques : Arc sin, Arc cos, Arc tg, Arg sh, Arg ch, Arg th;
f) certaines racines carrées.

Dans certains cas, il faudra intégrer plusieurs fois de suite par parties, en particulier dans le calcul de primitives par récurrence.

1.4 Exemples

1. *Calculer* $I = \int x e^{2x} dx$.

Posons $u = e^{2x}$ et $dv = x dx$; alors $du = 2e^{2x} dx$, $v = x^2/2$ et

$$I = uv - \int v\, du = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x^2 e^{2x} dx.$$

Cette dernière primitive étant plus compliquée que I, intervertissons les rôles, et posons $u = x$, $dv = e^{2x} dx$; alors $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ et

$$I = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} = (2x-1)\frac{e^{2x}}{4}.$$

2. *Calculer* $I = \int (x^2+3x) e^{-x} dx$.

En intégrant par parties deux fois de suite, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= -(x^2+3x)e^{-x} + \int (2x+3)e^{-x} dx \\ &= -(x^2+3x)e^{-x} - (2x+3)e^{-x} + 2\int e^{-x} dx \\ &= (-x^2-5x-5)e^{-x}. \end{aligned}$$

En pratique, on procède plutôt de la manière suivante : sachant que I est le produit de e^{-x} par une fonction polynomiale de degré 2, on écrit I avec des *coefficients indéterminés :*

$$I = (ax^2+bx+c)e^{-x},$$

et on dérive :

$$(2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} = (x^2+3x)e^{-x};$$

simplifons par e^{-x} :

$$-ax^2 + (2a-b)x + b - c = x^2 + 3x.$$

D'où

$$a = -1,\ 2a - b = 3,\ -b + c = 0, \text{ et enfin } b = -5,\ c = -5.$$

On retrouve bien entendu le résultat précédent. Mais *il est plus facile de calculer une dérivée qu'une primitive!*

3. *Calculer* $I = \int x \sin 2x \, dx$.

Posons $u = x$ et $dv = \sin 2x dx$; alors $du = dx$, $v = -1/2 \cos 2x$ et

$$I = uv - \int v du = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

4. *Calculer* $I = \int x \cos^2 x \, dx$.

Remplacons $\cos^2 x$ par $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$; alors :

$$I = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int x\, dx + \frac{1}{4}\int x \cos 2x \, d(2x).$$

Une intégration par parties montre que

$$I = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x.$$

5. *Calculer* $I = \int (x^2 - x) \sin \frac{x}{2} \, dx$.

Deux intégrations par parties successives nous montreraient que I est de la forme suivante :

$$I = (ax^2 + bx + c)\cos\frac{x}{2} + (a'x^2 + b'x + c')\sin\frac{x}{2}.$$

Utilisons encore une fois la méthode des coefficients indéterminés, et dérivons la fonction précédente :

$$\left[\frac{a'}{2}x^2 + \left(\frac{b'}{2} + 2a\right)x + \frac{c'}{2} + b\right]\cos\frac{x}{2} + \left[-\frac{a}{2}x^2 + \left(2a' - \frac{b}{2}\right)x + b' - \frac{c}{2}\right]\sin\frac{x}{2}.$$

Donc

$$\begin{array}{ll} a = -2 & a' = 0 \\ b = 2 & b' = 8 \\ c = 16 & c' = -4 \end{array}$$

et enfin

$$I = (-2x^2 + 2x + 16)\cos\frac{x}{2} + (8x - 4)\sin\frac{x}{2}.$$

6. *Calculer*

$$C = \int (2x^2-1)\cos 3x\,dx \qquad \text{et} \qquad S = \int (2x^2-1)\sin 3x\,dx.$$

Nous allons calculer ces deux primitives *simultanément :* en effet, il découle des formules d'Euler que

$$C+jS = \int (2x^2-1)\,e^{3jx}\,dx.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas du produit d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle; donc le résultat est de la forme :

$$C+jS = (ax^2+bx+c)\,e^{3jx}.$$

Dérivons les deux membres :

$$[(2ax+b)+3j(ax^2+bx+c)]\,e^{3jx} = (2x^2-1)\,e^{3jx}.$$

D'où

$$3ajx^2+(2a+3jb)x+b+3jc = 2x^2-1.$$

Deux fonctions polynomiales égales ont les mêmes coefficients :

$$3aj = 2 \qquad \text{soit} \qquad a = -\frac{2j}{3}$$

$$2a+3jb = 0 \qquad \text{soit} \qquad b = \frac{4}{9}$$

$$b+3jc = -1 \qquad \text{soit} \qquad c = -\frac{1+b}{3j} = \frac{13j}{27}$$

et

$$C+jS = \left(-\frac{2j}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{13j}{27}\right)(\cos 3x + j\sin 3x).$$

On obtient finalement C et S en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$C = \frac{4}{9}x\cos 3x + \left(\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{27}\right)\sin 3x,$$

$$S = \left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{13}{27}\right)\cos 3x + \frac{4}{9}x\sin 3x.$$

7. *Calculer* $I = \int e^{2x}\sin 3x\,dx.$

Posons $u = e^{2x}$ et $dv = \sin 3x\,dx$; alors $du = 2e^{2x}dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$ et :

$$I = uv - \int v\,du = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

On trouve ainsi une primitive analogue à I; intégrons encore par parties, en continuant à appeler u l'exponentielle (sinon, on trouverait $I = I$) :

$$u = e^{2x}, \qquad dv = \cos 3x\,dx, \qquad du = 2e^{2x}\,dx, \qquad v = \tfrac{1}{3}\sin 3x\,.$$

Donc

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\,.$$

Or, la dernière primitive (au coefficient près) n'est autre que I; donc

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right) - \frac{4}{9}I$$

et enfin :

$$I = \frac{3}{13}e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right).$$

Plus généralement, soit a et b deux nombres réels non nuls; on peut calculer simultanément

$$C = \int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad \text{et} \qquad S = \int e^{ax}\sin bx\,dx\,.$$

En effet, grâce aux formules d'Euler, nous pouvons écrire :

$$C + \mathrm{j}S = \int e^{(a+\mathrm{j}b)x}\,dx\,.$$

Or, les primitives des exponentielles à exposant complexe se calculent comme dans le cas des exposants réels ou imaginaires purs; ainsi :

$$C + \mathrm{j}S = \frac{1}{a+\mathrm{j}b}e^{(a+\mathrm{j}b)x} = \frac{e^{ax}}{a+\mathrm{j}b}(\cos bx + \mathrm{j}\sin bx)\,.$$

Il suffit alors de séparer les parties réelle et imaginaire pour trouver :

$$C = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)\,,$$

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\,.$$

8. *Calculer* $I = \displaystyle\int \ln x\,dx\,.$

En posant $u = \ln x$ et $dv = dx$, nous voyons que

$$I = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1)\,.$$

Le même procédé s'applique pour le produit d'une fonction polynomiale par une fonction logarithme. Par exemple, calculons :

$$I = \int (x^3-2x^2+4x-1)\ln x \, dx.$$

Posons $u = \ln x$ et $dv = (x^3-2x^2+4x-1)dx$; alors $du = dx/x$,

$$v = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$$

et

$$I = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3+2x^2-x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} - \frac{2}{3}x^2+2x-1\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3+2x^2-x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{2}{9}x^3 - x^2 + x.$$

9. *Calculer*

$$I = \int \mathrm{Arc\,sin}\, x \, dx, \qquad J = \int \mathrm{Arg\,sh}\, x\, dx, \qquad K = \int \mathrm{Arc\,tg}\, x \, dx, \quad \text{etc.}$$

Posons $u = \mathrm{Arc\,sin}\, x$, $\mathrm{Arg\,sh}\, x$, $\mathrm{Arc\,tg}\, x$, etc. et prenons toujours $dv = dx$. Il vient :

$$I = x\,\mathrm{Arc\,sin}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\,\mathrm{Arc\,sin}\, x + \sqrt{1-x^2}\,;$$

$$J = x\,\mathrm{Arg\,sh}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\,\mathrm{Arg\,sh}\, x - \sqrt{1+x^2}\,;$$

$$K = x\,\mathrm{Arc\,tg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{Arc\,tg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Le même procédé permet de calculer

$$\int x^2\,\mathrm{Arc\,tg}\, x\, dx = \frac{x^3}{3}\mathrm{Arc\,tg}\, x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{Arc\,tg}\, x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{Arc\,tg}\, x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2).$$

10. *Calculer* $I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Une primitivation par parties nous ramène à la même primitive I au second membre, avec un coefficient différent de 1. Posons en effet $u = \sqrt{x^2+1}$ et $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; alors

$$\mathrm{d}u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\,,\; v = x$$

et

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\,.$$

Il suffit d'écrire $x^2 = x^2+1-1$ pour obtenir

$$I = x\sqrt{x^2+1} - I + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - I + \operatorname{Arg\,sh} x\,.$$

D'où

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arg\,sh} x\,.$$

On pourrait calculer de même les primitives

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nous verrons plus loin des procédés plus rapides pour calculer ces primitives, à l'aide de changements de variables.

1.5 Utilisation simultanée des deux procédés fondamentaux. En pratique, on combine souvent les changements de variable et l'intégration par parties.

Par exemple, pour calculer

$$I = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\,,$$

posons d'abord $y = x^2$; alors

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\ln y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y\,.$$

Intégrons maintenant par parties, en posant $u = \ln y$ et $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y/(1+y)^2$; alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}y/y$, $v = -1/(1+y)$ et

$$I = -\frac{1}{4}\frac{\ln y}{1+y} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1+y)}\,.$$

Enfin,

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1},$$

et

$$I = -\frac{1}{4}\frac{\ln y}{1+y} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}.$$

De même, pour calculer

$$I = \int \exp(\operatorname{Arc\,sin} x)\,\mathrm{d}x,$$

posons d'abord $y = \operatorname{Arc\,sin} x$; d'où $x = \sin y$, $\mathrm{d}x = \cos y\,\mathrm{d}y$ et

$$I = \int \mathrm{e}^y \cos y\,\mathrm{d}y.$$

Nous sommes ainsi ramenés à un exemple déjà traité; rappelons que

$$I = \frac{\mathrm{e}^y}{2}(\cos y + \sin y).$$

Finalement (puisque $\cos y$ est positif) :

$$I = \exp(\operatorname{Arc\,sin} x)/2\,(\sqrt{1-x^2}+x).$$

PRIMITIVES DES FONCTIONS RATIONNELLES

1.6 Primitives des éléments simples de première espèce. Soit R une fraction rationnelle à coefficients réels (ou complexes). Pour calculer

$$I = \int R(x)\,\mathrm{d}x,$$

on commence par décomposer la fraction rationnelle R en éléments simples sur le corps des nombres complexes (voir tome 1).

— *Le calcul d'une primitive de la partie entière est immédiat.*

— *Les primitives des éléments simples de la forme* $1/(x-c)^p$, où $p>1$ et $c\in\mathbf{C}$, *se calculent de la manière suivante*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-c)^p} = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(x-c)^{p-1}}.$$

— *Les primitives des éléments simples de la forme* $1/(x-a)$, *ou* $a\in\mathbf{R}$, *se calculent à l'aide de la formule*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| \qquad \text{sur } \mathbf{R}-\{a\}.$$

— *Il reste à calculer les primitives des termes de la forme* $1/(x-c)$, *où* $c \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$. *Nous pouvons écrire* c *sous la forme* $c = a+\mathrm{j}b$, $b \neq 0$. *Alors*

$$\frac{1}{x-a-\mathrm{j}b} = \frac{x-a+\mathrm{j}b}{(x-a)^2+b^2}.$$

En prenant les primitives de la partie réelle et de la partie imaginaire, nous obtenons

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a-\mathrm{j}b} = \frac{1}{2}\ln[(x-a)^2+b^2]+\mathrm{j}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x-a}{b}.$$

Enfin, si la fonction donnée est à coefficients réels, il conviendra de regrouper les termes complexes conjugués afin de donner le résultat sous forme réelle.

Remarque. Lorsque R admet 0 pour seul pôle, il est inutile d'expliciter la décomposition en éléments simples ... car le calcul de I est immédiat! Lorsque R admet un seul pôle a, on se ramène au cas précédent en posant $y = x-a$.

1.7 Primitives des éléments simples de seconde espèce. En général, il est difficile de décomposer une fraction rationnelle en éléments simples sur le corps des nombres réels. Cependant, si l'on a affaire à un élément simple de seconde espèce, il est inutile de le décomposer en éléments simples de première espèce pour en calculer une primitive.

Considérons en effet

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n},$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que $b^2-4ac<0$ et n un entier naturel non nul. Le trinôme aX^2+bX+c n'a donc pas de racine réelle.

Ecrivons ce trinôme sous la forme canonique :

$$aX^2+bX+c = a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Posons $y = x+\dfrac{b}{2a}$, puis $t = \sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}\,y$; le calcul de I_n se trouve ainsi ramené à celui de

$$I'_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

On obtient une formule de récurrence en intégrant par parties :

$$I'_n = \frac{t}{(t^2+1)^n}+2n\int\frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^n}+2n(I'_n-I'_{n+1})\,;$$

soit :

$$2nI'_{n+1} = (2n-1)\,I'_n + \frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

On est ainsi ramené à

$$I'_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{Arc\,tg} t.$$

On obtient donc

$$I'_2 = \frac{2-1}{2}\,I'_1 + \frac{t}{2(t^2+1)},$$

soit

$$I'_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} t + \frac{t}{2(t^2+1)},$$

$$I'_3 = \frac{3}{4}\,I'_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2},$$

soit

$$I'_3 = \frac{3}{8}\operatorname{Arc\,tg} t + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{t}{4(t^2+1)^2},$$

$$I'_4 = \frac{5}{16}\operatorname{Arc\,tg} t + \frac{5t}{16(t^2+1)} + \frac{5t}{24(t^2+1)^2} + \frac{t}{6(t^2+1)^3},$$

et ainsi de suite.

On peut aussi faire le changement de variable $t = \operatorname{tg} u$; d'où :

$$I'_n = \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 u)^n}\,\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \int \cos^{2n-2} u\,\mathrm{d}u.$$

Le calcul de telles primitives est exposé au nº 2.6.

Passons maintenant au cas de

$$J_n = \int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Écrivons le numérateur sous la forme :

$$x = \frac{1}{2a}(2ax+b) - \frac{b}{2a}.$$

En décomposant J_n en deux, nous nous ramenons à des primitives déjà calculées.

1.8 Méthodes particulières. Soit P un polynôme à coefficients réels. Alors

$$\int \frac{P'(x)}{P(x)} \mathrm{d}x = \ln |P(x)| .$$

De même, pour tout entier naturel non nul n,

$$\int \frac{P'(x)}{[P(x)]^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{[P(x)]^{n-1}} .$$

Il n'est donc pas toujours utile de décomposer en éléments simples!

Soit maintenant R une fraction rationnelle. S'il existe un entier naturel $n>1$ et une fraction rationnelle S tels que

$$R = S(X^n)\, X^{n-1},$$

le changement de variable $t = x^n$ ramène le calcul de

$$I = \int R(x)\, \mathrm{d}x$$

à celui de

$$\frac{1}{n} \int S(t)\, \mathrm{d}t .$$

On abaisse ainsi les degrés du numérateur et du dénominateur.

1.9 Exemples

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} \mathrm{d}x .$

La fraction rationnelle

$$R = \frac{2X+3}{X^2-5X+6}$$

admet pour pôles simples 2 et 3; sa partie entière est nulle (car $\mathrm{d}^0(R)<0$). On peut donc écrire *a priori* R sous la forme

$$R = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{X-3} .$$

Rappelons que les coefficients A et B sont donnés par :

$$A = \frac{2\times 2+3}{2-3} = -7 \qquad B = \frac{2\times 3+3}{3-2} = 9 .$$

Ainsi :

$$I = -7 \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 9 \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} = -7 \ln |x-2| + 9 \ln |x-3| .$$

2. *Calculer* $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$.

La fraction rationnelle $R = \frac{1}{X^2(X+1)}$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$R = \frac{A}{X^2} + \frac{B}{X} + \frac{C}{X+1}.$$

On trouve aussitôt $C = 1$. En effectuant la division de 1 par $1 + X$ à l'ordre 1, on obtient $A = 1$ et $B = -1$. Ainsi,

$$R = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}.$$

Donc

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = -\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x+1|.$$

3. *Calculer* $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$R = \frac{1}{X^3+1}.$$

Cette fraction rationnelle a une partie entière nulle et trois pôles simples, à savoir -1, $-\omega$ et $-\omega^2$, où :

$$\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi/3} \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = \bar{\omega} = \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\pi/3}.$$

Rappelons que le résidu relatif à un pôle simple a est donné par

$$A = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{1}{3a^2}.$$

D'où

$$R = \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} + \frac{\omega}{3}\frac{1}{X+\omega} + \frac{\omega^2}{3}\frac{1}{X+\omega^2}$$

et

$$I = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{3} + \frac{\omega^2}{3}\right)\ln(x^2-x+1) + \left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{3} + \frac{\mathrm{j}\omega^2}{3}\right)\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Puisque $\omega + \omega^2 = -1$ et que

$$\mathrm{j}(\omega^2 - \omega) = \mathrm{j}\,(-\mathrm{j}\sqrt{3}) = \sqrt{3},$$

nous obtenons finalement :

$$I = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

On aurait pu aussi essayer de décomposer R en éléments simples sur le corps des réels :

$$R = \frac{A}{X+1} + \frac{MX+N}{X^2-X+1}.$$

Faute de méthode générale, le calcul de M et de N se ferait par identification.

Nous allons voir cependant des exemples où la décomposition en éléments simples sur **R** est aisée :

4. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{4}{x^3+4x}\,\mathrm{d}x.$

Ecrivons *a priori*

$$R = \frac{4}{X^3+4X} = \frac{A}{X} + \frac{MX+N}{X^2+4}.$$

Puisque R est *impaire*, il est évident que $N=0$. D'autre part, les méthodes habituelles montrent que $A=1$. En cherchant la partie entière de XR, nous obtenons $M=-A=-1$. Donc

$$R = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+4}.$$

Ainsi :

$$I = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4).$$

La fonction à intégrer étant impaire, on peut aussi faire apparaître la variable $y = x^2$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par x :

$$I = \int\frac{4\,x\,\mathrm{d}x}{x^4+4\,x^2} = 2\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+4\,y} = 2\int\frac{\mathrm{d}y}{y(y+4)}.$$

Puisque $\displaystyle\frac{1}{X(X+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+4}\right),$

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y+4} = \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln(y+4).$$

(Il est inutile de mettre des valeurs absolues, puisque $y = x^2 \geqslant 0$.)

5. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,dx$.

Faisons apparaître des puissances de x^2+2 au numérateur; à cet effet, écrivons :

$$X^3+X^2+2 = X(X^2+2)-2X+(X^2+2).$$

D'où

$$\frac{X^3+X^2+2}{(X^2+2)^2} = -\frac{2X}{(X^2+2)^2}+\frac{X}{X^2+2}+\frac{1}{X^2+2}$$

et

$$I = -\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx+\int \frac{x}{x^2+2}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

6. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

On écrit de même:

$$X^2 = (X^2+1)-1;$$

d'où

$$I = \int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

On peut aussi intégrer par parties, en posant $u = x$ et $dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, ce qui conduit à $du = dx$ et $v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)}$. Ainsi,

$$I = -\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x\,.$$

7. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$.

Puisque la fraction rationnelle $R = 1/(X^4-1)$ est *paire*, posons $Y = X^2$; alors

$$R = \frac{1}{Y^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{Y-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{Y+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-X^2}+\frac{1}{1+X^2}\right).$$

D'après le tableau des primitives,

$$I = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x.$$

Il a donc été inutile de décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $1/(1-X^4)$.

Passons maintenant à des exemples de calcul de primitives de fonctions rationnelles par changement de variable :

8. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{x^4}{(x+1)^3}\,dx.$

Il y a un seul pôle, à savoir -1; posons donc $y = x+1$:

$$I = \int\frac{(y-1)^4}{y^3}\,dy = \int\frac{y^4-4y^3+6y^2-4y+1}{y^3}\,dy$$

$$= \int y\,dy - 4\int dy + 6\int\frac{dy}{y} - 4\int\frac{dy}{y^2} + \int\frac{dy}{y^3}$$

$$= \frac{y^2}{2} - 4y + 6\ln|y| + \frac{4}{y} - \frac{1}{2y^2}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4(x+1) + 6\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

9. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2}\,dx.$

La fonction à intégrer est impaire; posons donc $y = x^2$:

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{y}{(y-1)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{y-1+1}{(y-1)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{(y-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2(y-1)} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \frac{1}{2(x^2-1)}.$$

10. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3+1)}.$

La présence de dx/x nous incite à prendre pour nouvelle variable $u = x^3$; alors :

$$\frac{du}{u} = 3\,\frac{dx}{x};$$

donc

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u(u+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|.$$

La même méthode permet de calculer :

$$I = \int \frac{dx}{x(x^n+1)},$$

où n est un entier naturel non nul. On pose cette fois $u = x^n$; d'où

$$I = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|.$$

1.10 Composées de fonctions rationnelles et de fonctions exponentielles. Voici un cas où un changement de variable permet de se ramener au cas des fonctions rationnelles : soient R une fraction rationnelle et a un nombre réel non nul. Pour calculer la primitive :

$$I = \int R(e^{ax})\,dx,$$

effectuons le changement de variable $t = e^{ax}$; alors $dx = \frac{1}{a}\frac{dt}{t}$ et

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{R(t)}{t}dt.$$

EXEMPLE

Calculer $I = \int \frac{dx}{e^x+1}$.

Posons $t = e^x$; alors

$$I = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1}.$$

EXERCICES

Changement de variable

Calculer les primitives suivantes :

1.1 $\displaystyle\int e^x \cos e^x \, dx$

1.2 $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx$

1.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

1.4 $\displaystyle\int \cos (\ln x) \frac{dx}{x}$

1.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

1.6 $\displaystyle\int \sin 2x \cos^3 2x \, dx.$

Intégration par parties

Calculer les primitives suivantes :

1.7 $\displaystyle\int x \sin x \cos x \, dx$

1.8 $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx$

1.9 $\displaystyle\int x^4 (\ln x)^2 \, dx$

1.10 $\displaystyle\int x^5 \sin 2x \, dx.$

Fonctions rationnelles

1.11 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1} \, dx$

1.12 $\displaystyle\int \frac{dx}{-x^2-x+2}$

1.13 $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \, dx$

1.14 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} \, dx$

1.15 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

1.16 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3} \, dx$

1.17 $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3} \, dx$

1.18 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1} \, dx$

1.19 $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} \, dx$

1.20 $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+2}{2x-3} \, dx$

1.21 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2} \, dx$

1.22 $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-x^2-2} \, dx$

1.23 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx, \quad a \neq b$

1.24 $\displaystyle\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx$

1.25 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4-1}\,dx$

1.26 $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

1.27 $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx$

1.28 $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\,dx$

1.29 $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-8}\,dx$

1.30 $\displaystyle\int \frac{20x+17}{(2x+1)^2(3x+5)}\,dx$

1.31 $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+x^3}\,dx$

1.32 $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$

1.33 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+13}$

1.34 $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}\,dx$

1.35 $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

1.36 $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$

1.37 $\displaystyle\int \frac{7x+3}{x^2+12x+52}\,dx$

1.38 $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}\,dx.$

CHAPITRE 2

INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES

2.1 Méthode générale. On se propose de calculer les primitives de la forme

$$I = \int f(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x,$$

où f désigne une fonction rationnelle de deux variables.

Par exemple

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x + 1}, \quad \text{etc.}$$

Rappelons que les fonctions circulaires sinus et cosinus s'expriment *rationnellement* en fonction de $t = \operatorname{tg} x/2$ (voir tome 1). Plus précisément,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Par suite,

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Le changement de variable $t = \operatorname{tg} x/2$ conduit à $x = 2 \operatorname{Arc\,tg} t + 2k\pi$ et à $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)$; le calcul de I se trouve ainsi ramené à celui de

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

c'est-à-dire au calcul d'une primitive d'une *fonction rationnelle* de la variable t.

Cette méthode générale conduit parfois à des calculs compliqués, et il convient dans la mesure du possible de choisir des variables mieux adaptées. On tiendra compte des remarques suivantes :

a) Si l'élément différentiel $f(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $-x$, on posera $u = \cos x$.

b) Si l'élément différentiel $f(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, on posera $u = \sin x$.

c) Si l'élément différentiel $f(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $\pi + x$, on posera $u = \operatorname{tg} x$. (Cela revient à poser d'abord $y = 2x$, puis $u = \operatorname{tg} y/2$.)

Dans chacun des cas, la nouvelle variable doit apparaître *naturellement* ... sans calculs de radicaux qui feraient apparaître des doubles signes!

Nous allons illustrer ces principes par de nombreux exemples; nous verrons ensuite des cas où la méthode générale n'est pas forcément la meilleure.

2.2 Exemples

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

Aucune des règles particulières ne s'applique ici. Effectuons donc le changement de variable $t = \operatorname{tg} x/2$; d'où

$$I = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+1-t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}$.

Posons toujours $t = \operatorname{tg} x/2$; alors

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)}{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t+1-t^2+2(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2}.$$

Posons alors $u = t+1$; d'après le tableau des primitives usuelles,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}}.$$

Il en découle que

$$I = \sqrt{2} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x/2+1}{\sqrt{2}}\right).$$

3. *Calculer* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

L'élément différentiel est invariant par le changement x en $-x$, car

$$\frac{\operatorname{tg}(-x)\,\mathrm{d}(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}.$$

Posons $u = \cos x$, d'où $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$ et

$$I = \int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\cos x(1+\cos x)} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}.$$

Or,

$$-\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u};$$

donc

$$I = \ln\left|\frac{1+u}{u}\right| = \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right|,$$

résultat que l'on aurait pu obtenir bien entendu en posant $t = \operatorname{tg} x/2$.

4. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\cos^2 x - 4\sin x - 6}$.

L'élément différentiel est invariant par le changement x en $\pi - x$. Posons $u = \sin x$, d'où $\mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$ et

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2-4u-6} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+4u+5}$$

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+2)^2+1} = -\operatorname{Arc\,tg}(u+2);$$

donc $I = -\operatorname{Arc\,tg}(2+\sin x)$.

5. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x}$.

L'élément différentiel est invariant dans le changement de x en $x+\pi$; posons donc $u = \operatorname{tg} x$. Alors

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}.$$

Remarquons que l'élément différentiel s'exprime simplement en fonction de $y = 2x$; en effet,

$$\frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}y}{2-(1-\cos y)/2} = \frac{\mathrm{d}y}{3+\cos y}.$$

Cependant, le nouvel élément différentiel n'est invariant ni dans le changement de y en $-y$, ni dans celui de y en $\pi - y$, ni dans celui de y en $y+\pi$. Nous devons donc nous rabattre sur le changement de variable $u = \operatorname{tg} y/2 = \operatorname{tg} x$, ce que nous avons fait depuis le début.

Dans l'exemple suivant, nous verrons que le changement de variable $y=2x$ peut être bénéfique.

6. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$.

Posons d'abord $y=2x$; alors

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin y}{2-\sin^2 y}\,dy.$$

Cette fois, l'élément différentiel est invariant dans le changement de y en $-y$. Posons donc $u=\cos y$; alors

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} u.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}(\cos 2x).$$

2.3 Méthodes particulières. Soient p et q deux entiers rationnels; pour calculer les primitives

$$\int \sin px \cos qx\,dx, \qquad \int \sin px \sin qx\,dx \qquad \text{et} \qquad \int \cos px \cos qx\,dx,$$

on transforme les produits en sommes, grâce aux relations :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)],$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

EXEMPLES

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$.

Appliquons la première formule :

$$I = \int \frac{1}{2}[\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)]\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x\,.$$

Ce type de calcul nous servira dans l'étude des séries trigonométriques.

2. *Calculer* $\int \sin^2 x\,dx$ et $\int \cos^2 x\,dx$.

C'est le cas où $m = p$. Les formules de transformation de produit en somme se réduisent à :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

D'où

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x, \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\,.$$

2.4 Primitives de la forme $I_{p,q} = \int \cos^p x \sin^q x\,dx$, où p et q sont des entiers rationnels.

a) Si p et q sont impairs, on pose $p = 2p'+1$ et $q = 2q'+1$ et l'on prend pour nouvelle variable $u = \cos 2x$; alors :

$$I_{p,q} = -\frac{1}{2^{p'+q'+1}}\int (1+u)^{p'}(1-u)^{q'}\,du\,.$$

b) Si p est impair et q pair, on pose $p = 2p'+1$ et l'on prend pour nouvelle variable $u = \sin x$; alors :

$$I_{p,q} = \int (1-u^2)^{p'} u^q\,du\,.$$

c) Si p est pair et q impair, on effectue de même le changement de variable $u = \cos x$.

d) Si p et q sont pairs, on peut abaisser le degré en remplaçant $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, $\sin x \cos x$ en fonction de $\sin 2x$.

EXEMPLES

1. *Calculer* $I = \int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$.

La méthode a) conduit à poser $u = \cos 2x$; d'où

$$I = -\frac{1}{16}\int (1+u)(1-u)^2\,du\,.$$

Nous devons donc calculer une primitive d'une fonction polynomiale :

$$I = -\frac{1}{16}\int (1-u-u^2+u^3)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{16}\left(u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}\right).$$

Finalement :

$$I = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x-\frac{\cos^2 2x}{2}-\frac{\cos^3 2x}{3}+\frac{\cos^4 2x}{4}\right).$$

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \cos^2 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

Ici p est pair et q impair; on prend donc comme nouvelle variable $u = \cos x$. D'où

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = -\int (1-u^2)\,u^2\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5} = -\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}.$$

3. *Calculer* $I = \displaystyle\int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

Ici p et q sont pairs; la méthode indiquée en d) conduit à écrire :

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x,$$

soit :

$$I = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x,$$

ou encore :

$$I = \frac{1}{32}\int (2-\cos 2x-2\cos 4x+\cos 6x)\,\mathrm{d}x.$$

Finalement :

$$I = \frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x.$$

2.5 Primitives de la forme $I_m = \int \sin^m x \,\mathrm{d}x$ et $J_m = \int \cos^m x \,\mathrm{d}x$, où m est un entier naturel.

Ces primitives rentrent dans le cas a) de la méthode précédente, lorsque m est impair.

Dans le cas général, on peut encore intégrer par parties :

$$I_m = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx = \int u \, dv$$

avec :

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx, \qquad v = -\cos x .$$

D'où

$$I_m = -\sin^{m-1} x \cos x - \int (m-1) \sin^{m-2} x \, (-\cos^2 x) \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \int \sin^m x \, dx ,$$

et cette dernière primitive n'est autre que I_m. On en déduit

$$m I_m = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx ;$$

en divisant les deux membres par m, on obtient I_m en fonction d'une primitive où l'exposant est devenu $m-2$. On obtient ainsi la relation de récurrence :

$$I_m = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2} .$$

On se ramène ainsi au calcul de $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$ si m est impair, et à celui de $I_0 = \int dx = x$ si m est pair.

On peut enfin utiliser les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

que l'on élève à la puissance m; les coefficients binomiaux sont donnés par le triangle de Pascal (voir tome 1). On regroupe les termes équidistants des extrêmes pour obtenir des sinus ou des cosinus, *au premier degré*.

Le calcul de J_m s'effectue de manière analogue; on peut encore passer d J_m à I_m en remplaçant x par $\pi/2 - y$.

EXEMPLE

Calculons $I_7 = \int \sin^7 x \, dx$

à l'aide des trois procédés ci-dessus.

a) Posons $t = \cos x$; alors

$$
\begin{aligned}
I_7 &= -\int (1-t^2)^3 \,\mathrm{d}t = -\int (1-3t^2+3t^4-t^6)\,\mathrm{d}t \\
&= -t+t^3-\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{7}t^7 \\
&= -\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x .
\end{aligned}
$$

b) Intégrons par parties :

$$
\begin{aligned}
I_7 &= -\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x+\frac{6}{7}I_5 \\
I_5 &= -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}I_3 \\
I_3 &= -\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}I_1 .
\end{aligned}
$$

Comme $I_1 = -\cos x$, nous voyons que

$$
I_7 = -\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x-\frac{6}{35}\sin^4 x\cos x-\frac{8}{35}\sin^2 x\cos x-\frac{16}{35}\cos x .
$$

c) Linéarisons $\sin^7 x$; d'après les formules d'Euler,

$$
\begin{aligned}
\sin^7 x &= \frac{\mathrm{j}}{2^7}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})^7 = \\
&= -\frac{1}{2^6}\left[\frac{\mathrm{e}^{7\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-7\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}-7\,\frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}+21\,\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}-35\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}\right] \\
&= -\frac{1}{64}(\sin 7x-7\sin 5x+21\sin 3x-35\sin x),
\end{aligned}
$$

et

$$
I_7 = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{7}{5}\cos 5x+7\cos 3x-35\cos x\right).
$$

Remarque. Si m est égal à 3, il est plus avantageux de se servir des formules suivantes bien connues en trigonométrie

$$
\begin{cases}
\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x \\
\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x
\end{cases}
$$

d'où l'on tire $\sin^3 x$ ou $\cos^3 x$ en fonction de lignes trigonométriques *au premier degré*, faciles à intégrer.

Si $m=4$, on élèvera au carré les formules suivantes

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$$

ce qui donne trois primitives. Par exemple :

$$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + 2\int \cos 2x \, dx + \int \cos^2 2x \, dx\right].$$

Dans la dernière primitive, on remplace $\cos^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$:

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}.$$

2.6 Primitive de la forme $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ et $J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, où n est un entier naturel non nul.

a) *Si n est pair*, on pose $n = 2n'$. Pour le calcul de I_n, la méthode générale conduit à effectuer le changement de variable $t = \operatorname{tg} x$, d'où :

$$I_{2n'} = \int (1+t^2)^{n'-1} dt.$$

On retrouve ainsi la formule :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Enfin, le calcul de $J_{2n'}$ se ramène au précédent grâce au changement de variable $y = \pi/2 - x$.

b) *Si n est impair*, on pose $n = 2n'+1$. Le calcul de $J_{2n'+1}$ se ramène au cas d'une fonction rationnelle grâce au changement de variable $t = \operatorname{tg} x/2$:

$$J_{2n'+1} = \frac{1}{2^{2n'}} \int \frac{(1+t^2)^{2n'}}{t^{2n'+1}} dt.$$

(Le calcul est plus simple que si l'on avait posé $u = \sin x$.)

Par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\operatorname{tg} x/2|.$$

Enfin, le calcul de $I_{2n'+1}$ se ramène à celui de $J_{2n'+1}$ grâce au changement de variable $y = \pi/2 - x$. En particulier,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

2.7 Exemples

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Posons $u = \operatorname{tg} x$; alors $du = dx/\cos^2 x$ et $1/\cos^2 x = 1 + u^2$. D'où

$$I = \int (1+u^2)\,du = u + \frac{u^3}{3} = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}.$$

De même, prenant pour nouvelle variable $\cot x$, on voit que

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}.$$

De nombreuses primitives se ramènent à la forme précédente; ainsi :

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^6 x} - \int \frac{dx}{\cos^4 x};$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^4 x} dx = 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^4 x};$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin 2x} dx = \int \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{2\sin x \cos x} dx = \int \frac{3 - 4\sin^2 x}{2\cos x} dx$$

$$= \int \frac{-1 + 4\cos^2 x}{2\cos x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} + 2\int \cos x\, dx.$$

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$.

Nous pouvons écrire I sous la forme :

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} - \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Pour calculer la première primitive du second membre, nous pouvons poser

$y = \pi/2 - x$, puis $u = \mathrm{tg}\, y/2$. Nous pouvons aussi intégrer par parties

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x};$$

d'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

(On remarquera que l'intégration par parties de $\int \mathrm{d}x/\cos^3 x$ conduirait à une relation entre $\int \mathrm{d}x/\cos^3 x$ et ... $\int \mathrm{d}x/\cos^5 x$. Il convient donc d'intégrer par parties le terme que l'on connaît ... pour en déduire le terme que l'on ne connaît pas!)

3. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos^2 x}$.

Puisque l'élément différentiel est invariant dans le changement de x en $-x$, la méthode générale conduit à prendre $\cos x$ pour nouvelle variable. Voici une méthode beaucoup plus rapide (mais très artificielle) : puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nous voyons que

$$I = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

La première primitive a déjà été calculée; la seconde se traite grâce au changement de variable $u = \cos x$; d'où

$$I = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x}.$$

4. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$.

Pour mettre le dénominateur sous la forme d'un produit, posons $y = \pi/2 - x$; alors

$$1 + \sin x = 1 + \cos y = 2\cos^2 y/2.$$

D'où :

$$I = -\int \frac{\cos y}{2\cos^2 y/2}\mathrm{d}y = -\int \frac{2\cos^2 y/2 - 1}{2\cos^2 y/2}\mathrm{d}y = -y + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y/2}$$

$$= -y + \mathrm{tg}\, y/2.$$

Finalement (à une constante additive près) :

$$I = x + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

2.8 Primitive de la forme $I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$, où n est un entier rationnel.

Le cas où n est négatif se ramène à celui où n est positif grâce au changement de variable $y = \pi/2 - x$. Supposons donc n strictement positif, et distinguons deux cas.

a) *Lorsque n est impair*, on pose $n = 2n' + 1$. La méthode générale conduit à effectuer le changement de variable $t = \cos 2x$; d'où

$$I_n = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)^{n'}}{(1+t)^{n'+1}} dt.$$

Pour calculer cette dernière primitive, il est commode d'effectuer le changement de variable $u = 1 + t$.

Dans le cas où $n = 1$, il est plus simple d'effectuer le changement de variable $t = \cos x$; ainsi :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\cos x|.$$

Par suite,

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x|.$$

b) *Lorsque n est pair*, la méthode générale conduit à effectuer le changement de variable $t = \operatorname{tg} x$, qui convient aussi lorsque n est impair. En effet,

$$I_n = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

EXEMPLES

1. Examinons le cas où $n = 4$:

$$\int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{Arc\,tg} t.$$

Par suite,

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x.$$

2. Examinons maintenant le cas où $n = 5$. La même méthode conduit à :

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int \frac{t^5 + t^3 - t^3 - t + t}{1+t^2} dt$$

$$= \int t^3 \, dt - \int t \, dt + \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+t^2).$$

D'où :

$$I_5 = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x|.$$

Puisque l'exposant est impair, nous pouvons aussi poser $t = \cos 2x$; d'où :

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $u = 1+t$; alors :

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int \frac{(2-u)^2}{u^3}\,\mathrm{d}u = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^3} + 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} - \frac{1}{2}\ln|u|.$$

2.9 Intégrales de Wallis. Nous allons voir sur un exemple célèbre que le calcul d'une intégrale, c'est-à-dire d'un nombre, est parfois plus simple que celui d'une primitive, c'est-à-dire d'une fonction. En effet, pour certaines bornes d'intégration, la partie tout intégrée d'une intégration par parties peut être nulle.

Considérons l'intégrale

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,\mathrm{d}x,$$

où m est un entier naturel.

Le résultat de l'intégration par parties, établi précédemment, devient :

$$mI_m = [-\sin^{m-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (m-1)\,I_{m-2},$$

soit

$$mI_m = (m-1)\,I_{m-2}.$$

Cette formule de récurrence permet de ramener, de proche en proche, le calcul de I_m à celui de I_0 ou de I_1 suivant que m est pair ou impair.

— Si $m = 2p$, on obtient

$$\begin{aligned} 2pI_{2p} &= (2p-1)I_{2p-2} \\ (2p-2)I_{2p-2} &= (2p-3)I_{2p-4} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2I_2 &= I_0. \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre, il vient :

$$I_{2p} = \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times 2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

car

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

— Si $m = 2p+1$, on obtient

$$\begin{aligned}(2p+1)I_{2p+1} &= 2pI_{2p-1}\\ (2p-1)I_{2p-1} &= (2p-2)I_{2p-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 3I_3 &= 2I_1 .\end{aligned}$$

Comme

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1 ,$$

on déduit en multipliant membre à membre :

$$I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)} .$$

Remarquons que les deux intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

sont égales. Pour le démontrer, il suffit, dans la deuxième par exemple, de faire le changement de variable $x = \pi/2 - u$.

EXERCICES

Calculer les primitives suivantes :

2.1 $\displaystyle\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$

2.2 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x}$

2.3 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$

2.4 $\displaystyle\int\sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

2.5 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x-\cos\theta}\quad \theta\in[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(poser $\operatorname{tg} x/2=t$ et $\operatorname{tg}\theta/2=\alpha$)

2.6 $\displaystyle\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$

2.7 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^2 x}$

2.8 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}^3 x}$

2.9 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

2.10 $\displaystyle\int\frac{\cos^4 x\,\mathrm{d}x}{\sin x}$

2.11 $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

2.12 $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{1-2\sin x}$

2.13 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x+\cos 2x}$

2.14 $\displaystyle\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$

2.15 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

2.16 $\displaystyle\int\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

2.17 $\displaystyle\int\cos 3x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

2.18 $\displaystyle\int(1+\cos x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$

2.19 $\displaystyle\int\frac{(\sin x)^{1/2}}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

2.20 $\displaystyle\int(1+\cos 3x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$

2.21 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{[\cos x(1-\cos x)]^{1/2}}$

2.22 $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{(\sin x)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$

2.23 $\displaystyle\int\operatorname{sh}^3 x\,\mathrm{d}x$

2.24 $\displaystyle\int\frac{\sin^6 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x$ (poser $\operatorname{tg} x=\operatorname{sh} y$)

2.25 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}$.

CHAPITRE 3

INTÉGRALES ABÉLIENNES

Les *intégrales abéliennes* (introduites par Niels Abel au début du XIX[e] siècle) sont des primitives faisant intervenir des radicaux. Nous allons voir quelques cas particuliers très importants.

3.1 Primitives de la forme $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Lorsque $a=0$, le changement de variable $t=bx+c$ montre que

$$I = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{b}\sqrt{t} = \frac{2}{b}\sqrt{bx+c}.$$

Lorsque $a \neq 0$, on écrit le trinôme aX^2+bX+c sous forme canonique :

$$aX^2+bX+c = a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

On est ramené à l'un des trois sous-cas suivants (k désignant un nombre réel strictement positif) :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2-u^2}} = \operatorname{Arc\,sin} \frac{u}{k},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+k^2}} = \operatorname{Arg\,sh} \frac{u}{k},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-k^2}} = \operatorname{Arg\,ch} \frac{u}{k}.$$

Cette dernière expression n'étant valable que si $u>k$, on retiendra plutôt

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-k^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-k^2}|.$$

Toutes ces primitives ... bien entendu à savoir par cœur ... sont consignées dans le tableau des primitives usuelles.

(Pour ne pas mélanger ces cas, on notera que $\sqrt{k^2-u^2}$ n'est défini que sur un intervalle borné, tout comme arc sinus; $\sqrt{u^2+k^2}$ est toujours défini, comme argument sinus hyperbolique; enfin, $\sqrt{u^2-k^2}$ n'est défini qu'en dehors d'un certain intervalle borné, tandis que Arg ch u/k n'est défini que pour u supérieur à k.)

3.2 Exemples.

1. Les résultats précédents conduisent immédiatement à :

$$\int \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2}} = \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{(4+x^2)^{1/2}} = \operatorname{Arg\,sh} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^{1/2}} = \operatorname{Arg\,ch} \frac{x}{2} \quad \text{si} \quad x > 2$$

$$= \ln |x+(x^2-4)^{1/2}| \quad \text{si} \quad |x| > 2\,.$$

2. *Calculer* $I = \int \frac{dx}{(-4x^2+2x+1)^{1/2}}$.

En mettant le radicande sous sa forme canonique, nous obtenons :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4[(x-2/8)^2-(4+16)/64]}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-1/4)^2-20/64]}}.$$

On se ramène au tableau des primitives en posant $y = x - \frac{1}{4}$. D'où

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{\sqrt{5/16}} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,sin} \frac{4x-1}{\sqrt{5}}.$$

3. *Calculer* $I = \int \frac{dx}{(x^2+12x+48)^{1/2}}$.

On obtient de même :

$$I = \int \frac{dx}{[(x+6)^2+12]^{1/2}} = \operatorname{Arg\,sh} \frac{x+6}{2\sqrt{3}}.$$

4. *Calculer* $I = \int \frac{dx}{(x^2+x-2)^{1/2}}$.

On obtient cette fois :

$$I = \int \frac{dx}{[(x+1/2)^2-9/4]^{1/2}} = \ln \left|x+1/2+\sqrt{(x+1/2)^2-9/4}\,\right|.$$

3.3 Primitives de la forme $I = \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

On se ramène au cas précédent en posant :

$$t = \frac{1}{px+q}.$$

Supposons par exemple $t > 0$; alors :

$$\frac{\mathrm{d}x}{px+q} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad x = \frac{1-qt}{pt}$$

et

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{pt}\sqrt{a(1-qt)^2+b(1-qt)\,pt+cp^2t^2}.$$

Finalement :

$$I = -\int \frac{p}{\sqrt{(aq^2-bpq+cp^2)t^2+(bp-2aq)t+a}}\,\mathrm{d}t.$$

Sur des exemples numériques, on obtient des expressions très simples.

EXEMPLES

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^{1/2}}$, avec $x > 0$.

Posons $x = 1/u$; alors $\mathrm{d}x/x = -\mathrm{d}u/u$, et

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u\,(1+1/u^2)^{1/2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^{1/2}} = -\mathrm{Arg\,sh}\,u = -\mathrm{Arg\,sh}\,\frac{1}{x}.$$

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\,(1-x^2)^{1/2}}$.

Posons $x-1 = 1/u$; alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{u[1-(1+1/u)^2]^{1/2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(-2u-1)^{1/2}}.$$

(Puisque $x^2 \leqslant 1$, u est négatif.)

Finalement :

$$I = \sqrt{-2u-1} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

3.4 Primitives de la forme $I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$.

Lorsque $a=0$, le changement de variable $t = \mathrm{b}x+c$ montre que

$$I = \int \frac{1}{b}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3b}\,t^{3/2} = \frac{2}{3b}\,(bx+c)^{3/2}.$$

Lorsque $a \neq 0$, on écrit le trinôme aX^2+bX+c sous forme canonique :

$$aX^2+bX+c = a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

On est ramené à l'un des trois sous-cas suivants (k désignant un nombre réel strictement positif) :

$$I = \int \sqrt{k^2-u^2}\,\mathrm{d}u, \qquad J = \int \sqrt{u^2+k^2}\,\mathrm{d}u, \qquad K = \int \sqrt{u^2-k^2}\,\mathrm{d}u.$$

On peut alors intégrer par parties, comme il a été dit précédemment. On peut aussi utiliser un changement de variable.

Pour le calcul de I, posons $u = k\sin t$, où $t \in [-\pi/2, \pi/2]$; alors :

$$I = k^2 \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = k^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = k^2/2 \int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= k^2\left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right),$$

soit :

$$\int \sqrt{k^2-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{k^2-u^2} + k^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{u}{k}\right).$$

Pour le calcul de J, posons $u = k\,\mathrm{sh}\,t$; nous obtenons de même :

$$J = k^2\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{4} + \frac{t}{2}\right),$$

soit :

$$\int \sqrt{u^2+k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+k^2} + k^2 \operatorname{Arg\,sh}\frac{u}{k}\right).$$

Pour le calcul de K, posons $u = k\,\mathrm{ch}\,t$, où $t \geqslant 0$; alors :

$$K = k^2 \int \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{k^2}{2} \int (\mathrm{ch}\,2t-1)\,\mathrm{d}t = k^2\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{4} - \frac{t}{2}\right),$$

soit :

$$\int \sqrt{u^2-k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-k^2} - k^2 \operatorname{Arg\,ch}\frac{u}{k}\right).$$

3.5 Exemples

1. *Calculer* $I = \int (5-3x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

Posons $x = \sqrt{5/3}\,\sin u$; alors :

$$I = \int [\sqrt{5}(1-\sin^2 u)]^{1/2}\sqrt{\frac{5}{3}}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{5}{\sqrt{3}}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}\int (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(u+\frac{\sin 2u}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{3}{5}}x + \frac{\sqrt{3}\,x(5-3x^2)^{1/2}}{5}\right).$$

2. *Calculer* $I = \int (x^2+24x+244)^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

Remarquons que

$$X^2+24X+244 = (X+12)^2+100.$$

Posons donc $y = x+12$; alors :

$$I = \int (y^2+100)^{1/2}\,\mathrm{d}y.$$

Le changement de variable $y = 10\,\mathrm{sh}\,t$ conduit à

$$I = 100\int \mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = 50\int (\mathrm{ch}\,2t+1)\,\mathrm{d}t = 25(\mathrm{sh}\,2t+2t).$$

Finalement :

$$I = 50\left[\frac{x+12}{10}\left(1+\frac{(x+12)^2}{100}\right)^{1/2} + \mathrm{Arg\,sh}\,\frac{x+12}{10}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x+12)(x^2+24x+244)^{1/2} + 50\,\mathrm{Arg\,sh}\,\frac{x+12}{10}.$$

3.6 Primitives de la forme $I = \int R\left(x, \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées.

(On remarquera que ce cas contient celui de $\int R(x, \sqrt{ax+b})\,\mathrm{d}x$.)

On prend le radical pour nouvelle variable :

$$u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Cette méthode est justifiée car l'on peut calculer x en fonction de u ... sans introduire un nouveau radical!

D'où

$$x = \frac{b-du^2}{cu^2-a} \quad \text{et} \quad dx = 2\,\frac{ad-bc}{(cu^2-a)^2}\,u\,du\,.$$

On se ramène ainsi à calculer une primitive d'une fonction rationnelle.

3.7 Exemples

1. *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(2x+1)^{1/2}}$.

Posons $u = (2x+1)^{1/2}$; d'où

$$x = (u^2-1)/2, \qquad dx = u\,du$$

et

$$I = \int \frac{[(u^2-1)/2]^2}{u}\,u\,du = \int \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4-2u^2+1)\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{2}{3}u^3 + u\right];$$

il suffit de remplacer u par sa valeur $(2x+1)^{1/2}$.

2. *Calculer* $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Nous pouvons effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; alors

$$x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \qquad dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2}\,du$$

et

$$I = \int \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\,du\,.$$

Une autre méthode consiste à poser $x = \operatorname{ch} u$; alors :

$$I = \int \operatorname{th} u/2 \operatorname{sh} u\,du = 2\int \operatorname{sh}^2 u/2\,du = \int (\operatorname{ch} u - 1)\,du = \operatorname{sh} u - u\,.$$

Donc

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arg\,ch} x\,.$$

3.8 Primitives de la forme $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$, où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées.

Lorsque $a=0$, on retombe sur le cas précédent.
Lorsque $a \neq 0$, on met le trinôme aX^2+bX+c sous la forme canonique :

$$aX^2+bX+c = a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Posons $k=(b^2-4ac)/4a^2$ et $t=x+b/2a$; nous-nous ramenons au calcul d'une primitive de la forme :

$$J = \int S(t, \sqrt{a(t^2-k)})\,\mathrm{d}t\,.$$

Écartons les cas triviaux où $k=0$ et où $a<0$, $k<0$; distinguons alors les trois cas suivants :

1) $a>0$, $k<0$. On pose $t=\sqrt{-k}\operatorname{sh} u$.
2) $a>0$, $k>0$. On pose $t=\sqrt{k}\operatorname{ch} u$.
3) $a<0$, $k>0$. On pose $t=\sqrt{k}\sin u$.

3.9 Exemples

1. *Calculer* $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2+2(1-x^2)^{1/2}}$.

Posons $x=\sin u$, avec $u\in\,]-\pi/2, \pi/2[$; alors :

$$I = \int \frac{\cos u}{\cos^2 u + 2\cos u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{2+\cos u}.$$

Le changement de variable $t=\operatorname{tg} x/2$ nous a déjà conduits à :

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right).$$

2. *Calculer* $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\,(x^2+1)^{1/2}}$.

Posons $x = \operatorname{sh} u$; alors :

$$I = \int \frac{\operatorname{ch} u}{(\operatorname{sh}^2 u+4)\operatorname{ch} u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{sh}^2 u+4}.$$

Posons maintenant $t = \operatorname{th} u$; alors :

$$\operatorname{sh}^2 u = \operatorname{th}^2 u \operatorname{ch}^2 u = \frac{t^2}{1-t^2} \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

et

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4(1-t^2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{4-3t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{4/3-t^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left|\frac{t+2/\sqrt{3}}{t-2/\sqrt{3}}\right|.$$

EXERCICES

Calculer les primitives suivantes :

3.1 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$

3.2 $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+x)(1+x)^{1/2}}$

3.3 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+16x+36)^{1/2}}$

3.4 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{1/2}(1+x)^{1/2}}$

3.5 $\displaystyle\int(3x^2+5)^{1/2}\,dx$

3.6 $\displaystyle\int\frac{(1-x)\,dx}{(1-x^2)^{1/2}}$

3.7 $\displaystyle\int\frac{dx}{x+(x-1)^{1/2}}$

3.8 $\displaystyle\int x(a^2+x^2)^{1/2}\,dx$

3.9 $\displaystyle\int\frac{x+1}{(x^2+2x)^{1/2}}\,dx$

3.10 $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2)^{1/2}}$

3.11 $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x)\,x^{1/2}}$

3.12 $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)(1-x^2)^{1/2}}$

3.13 $\displaystyle\int\frac{dx}{(-x^2-12x+8)^{1/2}}$

3.14 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(a^2+x^2)^{1/2}}$

3.15 $\displaystyle\int\frac{dx}{x+x^{1/3}}$

3.16 $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x^3+2)^{1/4}}$

3.17 $\displaystyle\int\frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$

3.18 $\displaystyle\int\frac{4x-5}{(x^2-18x+106)^{1/2}}\,dx$

3.19 $\displaystyle\int x(3x+5)^{1/2}\,dx$

3.20 $\displaystyle\int x^2(2x^3+9)^{1/2}\,dx$

3.21 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+2x-3)^{1/2}}$

3.22 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+4x)^{1/2}}$

3.23 $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x^4)^{1/2}}$

3.24 $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^6)^{1/2}}$

3.25 $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)^{1/2}}{x^4}\,dx$

3.26 $\displaystyle\int\frac{2x^2-7x+10}{(x^2-6x+6)^{1/2}}\,dx$

3.27 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}(2+x^{1/2})}$

3.28 $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1+x^{3/2}}$

3.29 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$

3.30 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+2x)^{1/3}}$

3.31 $\displaystyle\int (1+2x^3)^{1/2}\,x^5\,dx$

3.32 $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(2x-x^2)^{1/2}}$

3.33 $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)\,(5x^2+8x+3)^{1/2}}$

3.34 $\displaystyle\int 2(1+x^2)^{1/3}\,x\,dx$

3.35 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)^{1/2}}$

3.36 $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{(1+4x^2)^{1/2}}$

3.37 $\displaystyle\int x^5(1-x^3)^{1/2}\,dx$

3.38 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+x^5+1)^{1/2}}$

3.39 $\displaystyle\int x^4(1-x^2)^{1/2}\,dx$

3.40 $\displaystyle\int (1-e^{-2x})^{1/2}\,dx$

3.41 $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x}+e^x+1}\,dx\,.$

CHAPITRE 4

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

L'étude des limites et des formes indéterminées conduit à comparer les fonctions au voisinage d'un point. A cet effet, nous allons introduire quatre relations binaires dans l'ensemble des fonctions.

4.1 Relation de domination. Considérons une partie non vide P de l'ensemble **R** des nombres réels, et un nombre réel x_0 adhérent à P. Par exemple, P peut être un intervalle d'origine ou d'extrémité x_0, contenant ou non ce point. Soient f et g des fonctions définies sur P. On dit que f est *dominée* par g (ou encore que g domine f) au voisinage de x_0, et on note

$$f = O(g),$$

s'il existe des nombres réels strictement positifs β et η tels que, pour tout élément x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap P$,

$$|f(x)| \leqslant \beta\, |g(x)|.$$

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur P, nous pouvons définir le rapport f/g. La relation $f = O(g)$ signifie alors que la restriction de f/g à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap P$ est bornée :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \beta.$$

On dit encore que f/g est bornée au voisinage de x_0.

Par exemple, la relation $f = O(1)$ signifie qu'il existe un intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ tel que la restriction de f à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap P$ soit bornée.

Dans l'ensemble des fonctions définies sur la partie P, la relation de domination est réflexive et transitive.

En effet, pour montrer que $f = O(f)$, il suffit de prendre $\beta = \eta = 1$. Montrons maintenant la transitivité; autrement dit, si $f = O(g)$ et si $g = O(h)$, alors $f = O(h)$. Puisque $f = O(g)$, il existe par définition des nombres réels strictement positifs β et η tels que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap P$,

$$|f(x)| \leqslant \beta\, |g(x)|.$$

De même, puisque $g = O(h)$, il existe des nombres réels strictement positifs β' et η' tels que, pour tout point x de $]x_0-\eta', x_0+\eta'[\, \cap P$,

$$|g(x)| \leqslant \beta'\, |h(x)|.$$

Les nombres réels $\beta'' = \beta\beta'$ et $\eta'' = \inf(\eta, \eta')$ sont strictement positifs et, pour tout point x de $]x_0-\eta'', x_0+\eta''[\, \cap P$,

$$|f(x)| \leqslant \beta''\, |h(x)|,$$

ce qui montre que f est dominée par h au voisinage de x_0.

On démontre de même que *les fonctions dominées par une fonction donnée constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur la partie P*. En particulier, si $f_1 = O(g)$ et si $f_2 = O(g)$, alors, pour tout couple (λ_1, λ_2) de nombres réels,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = O(g).$$

Enfin, *la relation de domination est compatible avec la multiplication*. Autrement dit, si $f_1 = O(g_1)$ et si $f_2 = O(g_2)$, alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur P, telles que f soit dominée par g au voisinage de x_0. Si $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, il en est de même de $f(x)$. Supposons de plus que f et g soient à valeurs positives; si $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, il en est de même de $g(x)$.

Une fonction ayant pour limite 0 est parfois appelée *infiniment petit*; de même, une fonction ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ est appelée *infiniment grand*. Avec cette terminologie, une fonction dominée par un infiniment petit est un infiniment petit; une fonction positive dominant un infiniment grand est encore un infiniment grand.

4.2 Relation de similitude. Nous venons de voir que la relation de domination est une relation binaire réflexive et transitive; mais ce n'est pas une relation d'équivalence ... car elle n'est pas symétrique!

Soient toujours f et g des fonctions définies sur la partie P. On dit que f et g sont *semblables* au voisinage de x_0, et on note

$$f \asymp g,$$

si $f = O(g)$ et si $g = O(f)$. Cela revient à dire qu'il existe trois nombres réels strictement positifs β, γ et η tels que, pour tout point x de $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap P$,

$$\beta |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \gamma |g(x)|.$$

Il est immédiat que l'on a affaire cette fois à une relation d'équivalence; en outre, cette relation d'équivalence est compatible avec la multiplication.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur P, semblables au voisinage de x_0. Pour que $f(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers x_0, il faut et il suffit que $g(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers x_0. Supposons de plus que f et g soient à valeurs positives; pour que $f(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, il faut et il suffit que $g(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0.

La relation de similitude au voisinage de x_0 n'est pas compatible avec l'addition, comme le montre l'exemple où $P = \mathbf{R}$, $x_0 = 0$, $f_1(x) = 1$, $g_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1$ et $g_2(x) = -1$. Les fonctions f_1 et g_1 sont semblables, ainsi que les fonctions f_2 et g_2; il n'en est pas de même de $f_1 + f_2$ et de $g_1 + g_2$.

4.3 Relation de prépondérance. Les relations précédentes, dont nous verrons apparaître l'intérêt surtout au moment des intégrales généralisées, ne sont pas assez précises dans certaines questions. C'est pourquoi on introduit encore la relation de prépondérance, impliquant la relation de domination, et la relation d'équivalence entre fonctions, impliquant la relation de similitude (sans que les implications réciproques soient vraies).

Soient f et g des fonctions définies sur P. On dit que f est *négligeable* devant g (ou encore que g est *prépondérante* sur f) au voisinage de x_0, et on note

$$f = o(g),$$

si, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$,

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$$

Les symboles O et o se lisent naturellement « grand o » et « petit o ». Au lieu de dire que g est prépondérante sur f, on dit parfois que g « l'emporte » sur f.

La relation $f = o(g)$ implique la relation $f = O(g)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Lorsque g ne s'annule pas sur P, la relation $f = o(g)$ signifie que $f(x)/g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. En particulier, la relation $f = o(1)$ signifie que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

EXEMPLES.

1. Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$; alors $x^\beta = o(x^\alpha)$ au voisinage de 0.
2. Pour tout nombre réel strictement négatif α, $\ln x = o(x^\alpha)$ au voisinage de 0.

Les propriétés de la relation de prépondérance, analogues à celles de la relation de domination, s'établissent de la même manière.

Ainsi, dans l'ensemble des fonctions définies sur la partie P, *la relation de prépondérance au voisinage de x_0 est transitive : la relation $f = o(g)$ et $g = o(h)$ implique la relation $f = o(h)$. Plus généralement, la relation $f = o(g)$ et $g = O(h)$, ou la relation $f = O(g)$ et $g = o(h)$, implique la relation $f = o(h)$.*

Les fonctions négligeables devant une fonction donnée constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur P. En particulier, si $f_1 = o(g)$ et si $f_2 = o(g)$, alors, pour tout couple (λ_1, λ_2) de nombres réels,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = o(g).$$

Enfin, *la relation de prépondérance est compatible avec la multiplication. Plus généralement, la relation $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$ implique la relation $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.*

4.4 Relation d'équivalence. Soient f et g des fonctions définies sur P. On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de x_0, et on note

$$f \sim g,$$

si

$$f - g = o(g).$$

Lorsque g ne s'annule pas sur P, la relation $f \sim g$ signifie que $f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers x_0. En effet, la relation $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$ équivaut à la relation

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon.$$

La relation $f \sim 0$ signifie qu'il existe un intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ tel que la restriction de f à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$ soit nulle.

La relation d'équivalence au voisinage de x_0 implique la relation de similitude au voisinage de ce point.

En effet, la relation $f=g+(f-g)$ montre aussitôt que f est dominée par g; il reste donc à montrer que g est dominée par f. Or, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$,

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| .$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$|g| = |g-f+f| \leqslant |g-f| + |f| ;$$

donc

$$|g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| + |f(x)| .$$

Si $\varepsilon < 1$,

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} |f(x)|,$$

ce qui montre que g est dominée par f.

La relation d'équivalence au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. La relation $f \sim g$ se lit « f et g sont équivalentes ».

La réflexivité est évidente.

Etablissons la symétrie. Si $f-g=o(g)$, nous savons que $g=O(f)$. Il en découle que $f-g$ est négligeable devant f, ce qu'il fallait prouver.

Passons à la transitivité. Supposons que $f-g=o(g)$ et que $g-h=o(g)$ (en tenant compte de la symétrie). Il vient aussitôt $f-h=o(g)$. Mais $g=O(f)$, et donc $f-h=o(f)$, ce qui achève la démonstration.

Enfin, *la relation d'équivalence entre fonctions est compatible avec la multiplication.* Autrement dit, si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

Pour établir ce résultat, écrivons la différence $f_1 f_2 - g_1 g_2$ sous la forme

$$f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1 (f_2 - g_2) + (f_1 - g_1) g_2 .$$

Or, f_1 est dominée par g_1, $f_2 - g_2$ est négligeable devant g_2, et $f_1 - g_1$ est négligeable devant g_1 ; il en découle que $f_1 f_2 - g_1 g_2$ est négligeable devant $g_1 g_2$, ce qu'il fallait prouver.

La relation d'équivalence au voisinage de x_0 n'est pas compatible avec l'addition; il suffit de reprendre le contre-exemple du nº 4.2, en remarquant que les fonctions f_1 et g_1 d'une part, f_2 et g_2 d'autre part sont non seulement semblables, mais aussi équivalentes au voisinage de x_0.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur P, g étant positive (resp. négative). Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, il existe un nombre réel strictement positif η tel que la restriction de f à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$ soit positive (resp. négative).

Supposons par exemple que g soit positive, et considérons un élément ε de $]0, 1[$. Puisque f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$,

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon g(x);$$

d'où

$$f(x) \geqslant (1-\varepsilon)g(x) \geqslant 0\,.$$

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur P, équivalentes au voisinage de x_0. Si $g(x)$ admet une limite l, finie ou non, lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tend aussi vers l.

En effet, dans le cas où l est finie, il suffit d'appliquer l'inégalité

$$|f(x)-l| \leqslant |g(x)-l| + \varepsilon|g(x)|\,.$$

Dans le cas où $l = +\infty$ (resp. $-\infty$), il existe un nombre réel strictement positif η tel que la restriction de g à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$ soit positive (resp. négative). La remarque précédente permet d'affirmer qu'il existe un nombre réel strictement positif $\eta' \leqslant \eta$ tel que la restriction de f à $]x_0-\eta', x_0+\eta'[\cap P$ soit positive (resp. négative.) Les restrictions de f et de g à cet ensemble étant de même signe, la similitude de f et g au voisinage de x_0 permet de conclure.

On remarquera que si f et g ont une même limite finie non nulle au point x_0, la relation $f \sim g$ n'implique pas la relation $\ln f \sim \ln g$. Prenons par exemple $x_0 = 0$, $f(x) = 1+x$ et $g(x) = 1+x^2$. Nous verrons que $\ln f(x) \sim x$ et que $\ln g(x) \sim x^2$; les fonctions $\ln f$ et $\ln g$ ne sont donc pas équivalentes au voisinage de 0.

Examinons maintenant le cas des limites infinies.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur P, admettant pour limite $+\infty$ au point x_0. S'il existe un nombre réel strictement positif η tel que la restriction de $f-g$ à $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap P$ soit bornée (et en particulier si $f(x)-g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0), il est immédiat que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple où $P = \mathbf{R}_+^*$, $x_0 = 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Examinons maintenant comment se transforment les relations de comparaison par passage au logarithme ou à l'exponentielle.

Soient f et g des fonctions définies sur P à valeurs réelles strictement positives, admettant $+\infty$ pour limite au point x_0. Si f est dominée par g, $\ln f$ est dominé par $\ln g$. Si f et g sont semblables, $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalents.

C'est une conséquence immédiate de la relation

$$\ln \frac{f}{g} = \ln f - \ln g.$$

Cependant, la relation $f \sim g$ n'implique pas la relation $\exp f \sim \exp g$. Par exemple, les fonctions $f: x \mapsto 1/x^2$ et $g: x \mapsto 1/x^2 + 1/x$ sont équivalentes au voisinage de 0, mais ce n'est pas le cas pour les fonctions $\exp f$ et $\exp g$.

Pour que $\exp f$ *soit équivalente à* $\exp g$, *il faut et il suffit que* $f(x)-g(x)$ *tende vers* 0 *lorsque* x *tend vers* x_0. *Autrement dit, pour que* f *et* g *soient équivalentes, il faut et il suffit que* $\ln f(x)-\ln g(x)$ *tende vers* 0 *lorsque* x *tend vers* x_0.

Il s'agit cette fois d'une conséquence de la relation

$$\exp f/\exp g = \exp(f-g)\,.$$

Examinons pour terminer comment se transforment les relations de comparaison par intégration.

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I et x_0 un point de I. On suppose que g est de signe constant sur chacun des deux intervalles $]-\infty, x_0[\, \cap I$ et $]x_0, +\infty[\, \cap I$.

Si f *est dominée par* g *au voisinage de* x_0, *alors*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En effet, il existe par définition deux nombres réels strictement positifs β et η tels que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap I$,

$$|f(x)| \leqslant \beta\,|g(x)|\,.$$

Il s'ensuit que, pour tout point x de $]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \cap I$,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \beta\left|\int_{x_0}^{x} |g(t)|\,\mathrm{d}t\right| = \beta\left|\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

On démontre de même que *si* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* x_0, *alors*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Si f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* x_0, *alors*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, par hypothèse, $f-g = o(g)$. Il en découle que

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} [f(t)-g(t)]\,\mathrm{d}t = o\left[\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Donc

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(L'énoncé est analogue dans le cas où f et g sont semblables, mais il faut alors supposer que f est aussi de signe constant sur chacun des deux intervalles considérés.)

4.5 Comparaison des fonctions au voisinage de l'infini. Les quatre définitions précédentes et les propriétés des relations de comparaison se transcrivent dans le cas des fonctions définies sur une partie P de $\mathbf{R}$ rencontrant tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$). Il suffit de remplacer l'intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ par un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ (resp. $]-\infty, c[$). Ce point de vue nous sera utile pour les intégrales généralisées.

En particulier, la présente étude s'applique à la comparaison des suites : c'est le cas où $P=\mathbf{N}$ et où $x_0=+\infty$. Nous en verrons des applications au moment des séries numériques.

EXEMPLE. Soit R une fonction rationnelle, écrite sous la forme

$$R(x)=\frac{\alpha_p x^p+\alpha_{p-1}x^{p-1}+\cdots+\alpha_0}{\beta_q x^q+\beta_{q-1}x^{q-1}+\cdots+\beta_0},$$

où α_p et β_q sont des nombres réels *non nuls*. Alors $R(x)$ est équivalent à

$$\frac{\alpha_p}{\beta_q}x^{p-q} \text{ au voisinage de } +\infty, \text{ ou au voisinage de } -\infty.$$

En effet, nous pouvons écrire $R(x)$ sous la forme :

$$R(x)=\frac{x^p(\alpha_p+\alpha_{p-1}/x+\cdots+\alpha_0/x^p)}{x^q(\beta_q+\beta_{q-1}/x+\cdots+\beta_0/x^q)}.$$

Nous voyons ainsi que $\dfrac{R(x)}{(\alpha_p/\beta_q)\,x^{p-q}}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$; nous obtenons donc la relation annoncée :

$$R(x)\sim\frac{\alpha_p}{\beta_q}x^{p-q}.$$

Explicitons quelques exemples : au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$,

$$\frac{3x^5+x+1}{x^3+2}\sim 3x^2,\qquad \frac{x^2+1}{x^5+x^3}\sim\frac{1}{x^3},\qquad \frac{x^3+x^2}{2x^3+x}\sim\frac{1}{2}.$$

En particulier, ces fonctions admettent respectivement pour limites $+\infty$, 0 et 1/2 lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Puisque $\cos x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, nous pouvons écrire que

$$\cos x\sim 1-x^2/2 \qquad\text{et}\qquad \cos x\sim 1+x^2/2$$

au voisinage de 0. Cependant, on démontre que la relation

$$\cos x-(1-x^2/2)=o(x^2)$$

est vraie, et que la relation

$$\cos x - (1 + x^2/2) = o(x^2)$$

ne l'est pas. Cette remarque conduit à la notion de développement limité.

4.6 Définition des développements limités. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, x_0 un point de I et n un entier naturel. On dit qu'une fonction numérique f définie sur I admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe une fonction polynomiale A de degré inférieur à n telle que $f(x) - A(x)$ soit négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0, ce qu'on note

$$f(x) = A(x) + o((x - x_0)^n).$$

Une telle fonction A s'appelle *développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0*.

Une telle fonction A, si elle existe, est unique. Plus précisément :

L'ensemble $\mathscr{P}_n$ des fonctions polynomiales définies sur I de degré inférieur à n et l'ensemble $\mathscr{N}_n$ des fonctions définies sur I négligeables devant $x \mapsto (x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ des fonctions numériques définies sur I.

Les fonctions $x \mapsto (x - x_0)^p$, où p parcourt $[0, n]$, constituent une base de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$. Ainsi, tout élément A de $\mathscr{P}_n$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n (x - x_0)^n, \tag{1}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels.

L'ensemble $\mathscr{D}_n$ des fonctions numériques définies sur I admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 est la somme directe de $\mathscr{P}_n$ et de $\mathscr{N}_n$:

$$\mathscr{D}_n = \mathscr{P}_n \oplus \mathscr{N}_n. \tag{2}$$

Ainsi, $\mathscr{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, tout élément f de $\mathscr{D}_n$ admet un développement limité A et un seul, et l'application $P_n : f \mapsto A$ n'est autre que le projecteur sur $\mathscr{P}_n$ parallèlement à $\mathscr{N}_n$; en particulier, cette application est linéaire :

$$P_n(\alpha f + \beta g) = \alpha P_n(f) + \beta P_n(g). \tag{3}$$

En effet, l'ensemble E_n des polynômes de degré inférieur à n étant un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$, l'ensemble $\mathscr{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Les polynômes $(X - x_0)^p$, où p parcourt $[0, n]$, constituant une base de E_n, les fonctions polynomiales associées constituent une base de $\mathscr{P}_n$.

D'autre part, l'ensemble $\mathscr{N}_n$ des fonctions négligeables devant $x \mapsto (x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Soit enfin A un élément de $\mathscr{P}_n \cap \mathscr{N}_n$. Écrivons A sous la forme (1) et supposons par l'absurde que l'ensemble des éléments p de $[0, n]$ tels que $\alpha_p \neq 0$ soit non vide. Notons k son plus petit élément; alors $A(x) \sim \alpha_k (x - x_0)^k$ et

$$\alpha_k (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n),$$

ce qui contredit la relation $\alpha_k \neq 0$, puisque $k \leqslant n$.

Pour tout entier naturel p strictement inférieur à n, $\mathscr{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}_p$ et, pour tout élément f de $\mathscr{D}_n$,

$$P_p(f) = P_p[P_n(f)]\,. \tag{4}$$

Il est immédiat que, pour tout entier $p < n$,

$$(x-x_0)^n = o((x-x_0)^p)\,,$$

ce qui montre que $\mathscr{N}_n \subset \mathscr{N}_p$.

Soient f un élément de $\mathscr{D}_n$ et

$$A_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(x-x_0)^n$$

son développement limité à l'ordre n. Écrivons $A_n(x)$ sous la forme

$$A_n(x) = A_p(x) + (x-x_0)^{p+1}[\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2}(x-x_0) + \ldots + \alpha_n(x-x_0)^{n-p-1}]\,.$$

Il est immédiat que $A_n - A_p$ appartient à $\mathscr{N}_p$, et donc que $f - A_p$ appartient à $\mathscr{N}_p$. Ainsi, $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{D}_p$ et

$$A_p = P_p(f) = P_p(A_n) = P_p[P_n(f)]\,.$$

Développement limité d'une fonction polynomiale. Soient f une fonction polynomiale non nulle et n son degré. D'après ce qui précède, f est son propre développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, ou à tout ordre supérieur à n; il en découle que f admet un développement limité à tout ordre strictement inférieur à n.

Ainsi, une fonction polynomiale admet un développement limité à tout ordre au voisinage de x_0.

L'ensemble $\mathscr{D}_n$ est un sous-anneau unitaire de l'anneau unitaire $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$. Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{D}_n$,

$$P_n(fg) = P_n[P_n(f)P_n(g)]\,. \tag{5}$$

Si g ne s'annule pas sur I, f/g appartient encore à $\mathscr{D}_n$, et le développement limité de f/g est le quotient de la division de $P_n(f)$ par $P_n(g)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ à l'ordre n.

Ainsi, l'ensemble $\mathscr{D}_n$ est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Soient en effet f et g deux éléments de $\mathscr{D}_n$, A et B leurs développements limités à l'ordre n au voisinage de x_0. Alors

$$fg - AB = (f-A)g + A(g-B)\,.$$

Comme $f-A$ et $g-B$ appartiennent à $\mathscr{N}_n$ et que g et A sont dominées par 1 au voisinage de x_0, $fg-AB$ appartient à $\mathscr{N}_n$. Par suite, $fg - P_n(AB)$ appartient à $\mathscr{N}_n$, ce qui montre que fg admet un développement limité, et que celui-ci est donné par la relation (5).

Supposons que g ne s'annule pas sur I. Alors $B(x_0) \neq 0$. Soit Q un élément de $\mathscr{P}_n$; puisque $g = O(1)$, la relation $f/g - Q \in \mathscr{N}_n$ équivaut à $f - gQ \in \mathscr{N}_n$, ou encore à $A - BQ \in \mathscr{N}_n$. En remplaçant x par $x_0 + y$, nous nous ramenons au cas où $x_0 = 0$. L'existence de Q est alors en évidence : il suffit de prendre pour Q le quotient de la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n.

4.7 Exemples

1. La fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par la formule $f(x) = 1/(1-x)$ admet pour tout entier naturel n un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Plus précisément,

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

L'existence de ce développement limité découle du nº 4.6. Pour calculer celui-ci, on peut effectuer la division de 1 par $1-X$ suivant les puissances croissantes à l'ordre n, ou remarquer que

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + + \dots + x^n + x^{n+1}/(1-x).$$

On démontre de même que

$$1/(1+x^2) = 1 - x^2 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + o(x^{2n-1}).$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par les formules

$$f(x) = \exp(-1/x^2) \quad \text{si} \quad x \neq 0$$
$$f(0) = 0.$$

Pour tout entier naturel n, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, à savoir la fonction nulle.

Posons $t = 1/x^2$; alors

$$|x^{-n}| \exp(-1/x^2) = t^{n/2} \exp(-t)$$

et

$$\lim_{x \to 0} |x^{-n}| \exp(-1/x^2) = \lim_{t \to +\infty} t^{n/2} \exp(-t) = 0.$$

Ainsi $f(x) = o(x^n)$, ce qu'il fallait prouver.

4.8 Intégration des développements limités. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, x_0 un point de I et n un entier naturel. Soit f une fonction continue sur I admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Alors toute primitive g de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de x_0. Plus précisément, si*

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \dots + \alpha_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

alors

$$g(x) = g(x_0) + \alpha_0(x-x_0) + \frac{\alpha_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-x_0)^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}).$$

En effet,

$$\int_{x_0}^{x} \left[f(t) - \sum_{p=0}^{n} \alpha_p (t-x_0)^p \right] dt = o((x-x_0)^{n+1}).$$

EXEMPLES

1. En intégrant les deux membres de la relation

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1}),$$

nous voyons que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2. De même, en intégrant les deux membres de la relation

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + o(x^{2n-1}),$$

nous voyons que

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}).$$

Soit f une fonction numérique continûment dérivable sur I. L'existence d'un développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0 n'implique pas l'existence d'un développement limité de f' à l'ordre $n-1$ au voisinage de x_0.

Soit par exemple la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 \sin 1/x \qquad \text{si } x \neq 0,$$
$$f(0) = 0.$$

La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, puisque $f(x) = o(x^2)$; mais nous avons vu que f n'est pas deux fois dérivable au point 0. Donc f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.

On peut cependant obtenir un développement limité d'une dérivée f' par dérivation du développement limité de f, dans la mesure où l'on sait d'avance que f' admet un développement limité. Plus précisément :

Soit f une fonction continûment dérivable sur I et admettant un développement limité A à l'ordre n. Si f' admet un développement limité B à l'ordre $n-1$, alors

$$B = A'.$$

4.9 Formule de Taylor-Young. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour que f admette un développement limité à l'ordre 0 (resp. 1) au voisinage de x_0, il faut et il suffit que f soit continue (resp. différentiable) en ce point.

Cependant, l'exemple ci-dessus montre que l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de x_0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en ce point. L'existence de dérivées successives est seulement une condition *suffisante* d'existence de développements limités :

Soit n un entier naturel non nul. Pour qu'une fonction f définie sur I admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, il suffit que f soit $n-1$ fois continûment dérivable sur I et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en ce point. Dans ces conditions,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) +$$
$$+ o((x-x_0)^n)$$

(formule de Taylor-Young).

En particulier, si $x_0 = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

(formule de Maclaurin-Young).

Raisonnons par récurrence sur n. Le cas où $n = 1$ provient de l'équivalence de la dérivabilité et de la différentiabilité de f au point x_0. Soient n un entier supérieur à 2 et g une fonction $n-2$ fois continûment dérivable sur I, telle que $g^{(n-1)}$ soit dérivable au point x_0; l'hypothèse de récurrence montre que

$$g(x) = g(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} g'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(x_0) + o((x-x_0)^{n-2}).$$

On en déduit par intégration

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = (x-x_0)\, g(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} g'(x_0) + \cdots +$$
$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} g^{(n-1)}(x_0) + o((x-x_0)^n).$$

Il suffit alors de prendre g égale à f', auquel cas

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0).$$

La formule de Maclaurin-Young s'applique en particulier à toute fonction indéfiniment dérivable.

4.10 Exemples. Calculons quelques développements limités au voisinage de 0, grâce à la formule de Maclaurin-Young.

1. Prenons $f(x) = \sin x$ et $n = 8$. Alors

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x = \sin(x+\pi/2) & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi) & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x = \sin(x+3\pi/2) & f'''(0) = -1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
f^{(p)}(x) = \sin(x+p\pi/2) & f^{(p)}(0) = \sin p\pi/2\,.
\end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} &f(0) \;= f''(0) \;= f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = f^{(8)}(0) = 0\,,\\ &f'(0) = f^{(5)}(0) = 1\,,\\ &f'''(0) = f^{(7)}(0) = -1\,. \end{aligned}$$

On obtient le développement limité :

$$x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}.$$

2. Cherchons de même le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 7 au voisinage de 0 :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x = \cos(x+\pi/2) & f'(0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f^{(p)}(x) = \cos(x + p\pi/2) & f^{(p)}(0) = \cos p\pi/2\,. \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} &f(0) \;= f^{(4)}(0) = 1,\\ &f'(0) = f'''(0) \;= f^{(5)}(0) = f^{(7)}(0) = 0,\\ &f''(0) = f^{(6)}(0) = -1\,. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + o(x^7).$$

3. Cherchons le développement limité de e^x à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \mathrm{e}^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = \mathrm{e}^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \mathrm{e}^x & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = \mathrm{e}^x & f'''(0) = 1 \\ f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^x & f^{(4)}(0) = 1\,. \end{array}$$

Ainsi :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + o(x^4).$$

4. Déterminons le développement limité de $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2} & f'(0) = 1/2 \\[2ex] f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2} & f''(0) = -1/4 \\[2ex] f'''(x) = \dfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2} & f'''(0) = 3/8\,. \end{array}$$

D'où

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

soit encore :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

4.11 Développements limités des fonctions usuelles. Plus généralement, on obtient les résultats suivants :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

(Cette dernière formule se réduit bien entendu à la formule du binôme lorsque $\alpha = n$; elle redonne le développement limité de $1/(1-x)$ lorsque $\alpha = -1$.)

Il n'y a pas de formule simple pour tg x ou pour th x. Cependant, on peut calculer le développement limité de tg x à un ordre donné assez petit en effectuant la division du développement limité de sin x par celui de cos x. On obtient ainsi le développement limité de tg x à l'ordre 6 :

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

De même :

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

4.12 Développement limité d'une fonction composée. *Soient I un intervalle de* **R**, *x_0 un point de I, n un entier naturel, f une fonction numérique définie sur I telle que $f(x_0) = 0$ et g une fonction numérique définie sur un intervalle J contenant*

$f(I)$. Si f admet un développement limité A à l'ordre n au voisinage de x_0 et si g admet un développement limité B à l'ordre n au voisinage de 0, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et

$$P_n(g \circ f) = P_n(B \circ A).$$

Écrivons en effet A et B sous les formes suivantes :

$$A(x) = \alpha_1 (x-x_0) + \alpha_2 (x-x_0)^2 + \ldots + \alpha_n (x-x_0)^n$$
$$B(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots + \beta_n y^n.$$

Alors

$$(g \circ f)(x) = (B \circ f)(x) + o(f(x)^n).$$

Puisque $f(x)$ est dominée par $x-x_0$ au voisinage de x_0, $f(x)^n = O((x-x_0)^n)$; d'où

$$(g \circ f)(x) - (B \circ f)(x) = o((x-x_0)^n).$$

D'autre part, les propriétés de la multiplication dans $\mathscr{D}_n$ montrent que, pour tout élément p de $[1, n]$,

$$f(x)^p - A(x)^p = o((x-x_0)^n).$$

Il en découle par linéarité que

$$(B \circ f)(x) - (B \circ A)(x) = o((x-x_0)^n).$$

Enfin, la fonction $B \circ A$, étant polynomiale, admet un développement limité au voisinage de x_0 à l'ordre n, et

$$g \circ f - P_n(B \circ A) \in \mathscr{N}_n,$$

ce qui achève la démonstration.

EXEMPLES

1. *Soit g une fonction numérique définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0, admettant un développement limité A à l'ordre n au voisinage de 0. Si g est paire (resp. impaire), la fonction polynomiale A est paire (resp. impaire).*

Supposons par exemple que g soit paire. Nous pouvons considérer g comme la composée de la fonction $f : x \mapsto -x$ et de la fonction g. L'unicité de A montre que, pour tout point x de I, $A(-x) = A(x)$, ce qu'il fallait prouver.

2. *Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \exp(\sin x)$.*

Nous savons que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et que

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + o(y^5).$$

Or,

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^5),$$

soit

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+o(x^5).$$

De même,

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3=x^3\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^5),$$

soit

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3=x^3\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^5).$$

Enfin,

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^4=x^4+o(x^5) \quad \text{et} \quad \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^5=x^5+o(x^5).$$

Il vient en substituant $\sin x$ à y dans le développement limité de e^y et en ne conservant que les monômes de degré inférieur à 5 :

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}+o(x^5).$$

4.13 Parties principales. Soient f une fonction définie sur une partie P de $\mathbf{R}$ et x_0 un point de P. On dit que f admet une partie principale au voisinage de x_0 s'il existe un entier naturel n et un nombre réel non nul α tels que $f(x)$ soit équivalent à $\alpha(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0. Dans ces conditions, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, à savoir $x \mapsto \alpha(x-x_0)^n$, ce qui montre l'unicité du couple (n, α). La fonction $x \mapsto \alpha(x-x_0)^n$ s'appelle *partie principale* de f au voisinage de x_0.

EXEMPLE. Si f est dérivable au point x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, $f-f(x_0)$ a une partie principale au voisinage de x_0, à savoir la fonction $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)$.

Ainsi, au voisinage de 0.

$\sin x \sim x$	$\operatorname{tg} x \sim x$
$\operatorname{Arc\,sin} x \sim x$	$\operatorname{Arc\,tg} x \sim x$
$\ln(1+x) \sim x$	$e^x-1 \sim x$.

Soient f et g deux fonctions admettant des parties principales $x \mapsto \alpha(x-x_0)^n$ et $x \mapsto \beta(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

Si $n<p$, $f+g$ admet pour partie principale $x \mapsto \alpha(x-x_0)^n$.

Si $n=p$ et si $\alpha+\beta \neq 0$, $f+g$ admet pour partie principale $x \mapsto (\alpha+\beta)(x-x_0)^n$.

Si $n = p$ et si $\alpha + \beta = 0$, il se peut que $f + g$ admette une partie principale au voisinage de x_0. Pour savoir s'il en est ainsi, on examinera si $f + g$ a un développement limité à un ordre strictement supérieur à n au voisinage de x_0.

4.14 Exemples de recherches de parties principales

1. Calculons la partie principale de la fonction

$$f(x) = 1 - \cos x$$

au voisinage de $x_0 = 0$. Nous savons que

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2 .$$

D'autre part,

$$\sin x/2 \sim x/2$$

au voisinage de 0. Donc

$$f(x) \sim 2(x/2)^2 = x^2/2 .$$

Ainsi, la partie principale de $f(x)$ est $x^2/2$.

2. Étudions maintenant

$$f(x) = (1 + x^3)^{1/2} - 1$$

au voisinage de 0. Pour cela, multiplions et divisons $f(x)$ par la quantité conjuguée, c'est-à-dire $(1 + x^3)^{1/2} + 1$. L'égalité remarquable

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

nous montre que

$$f(x) = \frac{1 + x^3 - 1}{(1 + x^3)^{1/2} + 1} = \frac{x^3}{(1 + x^3)^{1/2} + 1} .$$

Puisque le dénominateur tend vers 2, $f(x)$ a pour partie principale $x^3/2$ au voisinage de 0.

EXERCICES

Développements limités

Calculer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

4.1 $\sin 3x$ à l'ordre 5

4.2 $\cos 3x$ à l'ordre 6

4.3 e^{2x} à l'ordre 8

4.4 $(1+x)^{1/3}$ à l'ordre 4

4.5 $e^{\sin 3x}$ à l'ordre 3

4.6 $\operatorname{Arg\,sh} 2x$ à l'ordre 6

4.7 $(1-x)(1+x)^{-1/2}$ à l'ordre 3

4.8 $\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{a-x}{a+x}$ à l'ordre 6

4.9 $\ln \cos x$ à l'ordre 5

4.10 $1/\cos x$ à l'ordre 3

4.11 $e^x/(1-x)$ à l'ordre 3

4.12 $e^x/\cos x$ à l'ordre 3

4.13 $(1+e^x)^{1/2}$ à l'ordre 3

4.14 $\cos^p x \quad p \in \mathbf{N}^*$ à l'ordre 3

4.15 $\ln \operatorname{tg}(x+\pi/4)$ à l'ordre 3

4.16 $e^x \sin x$ à l'ordre 7.

Calculer les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

4.17 $\operatorname{tg} x$ au voisinage de 2

4.18 $\ln(1+x)$ au voisinage de 1

4.19 x^5-2x^3+4x au voisinage de -1

4.20 $\operatorname{Arc\,tg} x$ au voisinage de 3

4.21 $1/(1-x)$ au voisinage de -1

4.22 $(x+1)/(x-2)$ au voisinage de 3.

4.23 Retrouver le développement limité à l'ordre 8 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$, en remarquant que $f' = 1+f^2$.

4.24 Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = [\operatorname{tg}(x+\pi/4)]^{-\cot 2x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

et prolongée par continuité à l'origine.

Calculer les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

4.25 $\cos^3 x$

4.26 $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$

4.27 $(1-x)^{1/3}$

4.28 $x\,e^{-x}$

4.29 $\dfrac{1+3x^2}{(1-x)^3}$

4.30 $\sin x \cos 2x$.

Parties principales

Calculer la partie principale au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

4.31 $\operatorname{tg} x - \sin x$

4.32 $2 \sin x - \sin 2x - x^3$

4.33 $1 + \ln(1+x) - \cos x + x - 2 \sin x$

4.34 $1 - \cos x - \dfrac{1}{2} \sin^2 x$

4.35 $\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$

4.36 $x \cos \sqrt{x} - \ln(1+x)$

4.37 $\operatorname{ch} \sqrt{x} - \dfrac{1+5x/12}{1-x/12}$

4.38 $x - \dfrac{4}{15} \sin x + \dfrac{1}{15} \operatorname{tg} x - \dfrac{8}{5} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

CHAPITRE 5

ÉTUDE DES FORMES INDÉTERMINÉES

Nous allons appliquer la théorie des parties principales et des développements limités à la recherche de limites.

5.1 Généralités. Nous avons déjà rencontré des cas où les théorèmes généraux sur les limites ne s'appliquent pas, et où l'on peut cependant conclure grâce à une étude directe. Les notions de partie principale et de développement limité se montrent alors d'une grande utilité, comme nous allons le voir.

Soient f et g deux fonctions ayant pour limite 0, ou $+\infty$, au point x_0.

Lorsqu'on remplace f et g par des équivalents f_1 et g_1, f/g et f_1/g_1 ont simultanément des limites, et ces limites sont égales. On prendra par exemple pour f_1 et g_1 les parties principales de f et de g au voisinage de x_0.

Dans certains cas, l'emploi d'équivalents ou de parties principales ne permet pas de conclure, puisque la partie principale d'une somme n'est pas toujours la somme des parties principales. Il convient alors de faire appel aux développements limités.

Pour étudier des fonctions de la forme

$$f(x) = u(x)^{v(x)},$$

on revient à la définition, en écrivant $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \mathrm{e}^{v(x) \ln [u(x)]}.$$

On peut donc déterminer la limite de $f(x)$ en passant par l'intermédiaire de son logarithme :

$$\ln f(x) = v(x) \ln [u(x)].$$

Il y a indétermination lorsque l'un des facteurs tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, ce qui correspond aux cas suivants :

$$\begin{array}{ll} u(x) \to 1 & v(x) \to +\infty \\ u(x) \to 1 & v(x) \to -\infty \\ u(x) \to 0 & v(x) \to 0 \\ u(x) \to +\infty & v(x) \to 0. \end{array}$$

On représente traditionnellement des formes indéterminées par 1^∞, 0^0 et ∞^0. *Ces symboles n'ont aucun sens mathématique*; ils servent simplement à rappeler l'origine d'une indétermination, par exemple lorsque $u(x)$ tend vers 1 et que l'exposant $v(x)$ tend vers $+\infty$.

5.2 Exemples d'utilisation des parties principales

1. *Déterminer la limite de*

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

quand x tend vers 0.

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Cependant,

$$\sin 3x \sim 3x\,,\quad \operatorname{tg} 5x \sim 5x\,.$$

Donc

$$f(x)\sim 3x/5x=3/5\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} f(x)=3/5\,.$$

2. *Déterminer la limite de*

$$f(x)=\frac{1-\cos ax}{\sin^2 bx}$$

quand x tend vers 0.

Nous savons que

$$1-\cos ax \sim a^2x^2/2\,,\qquad \sin bx \sim bx\,.$$

Donc

$$\sin^2 bx \sim b^2x^2\,.$$

Ainsi,

$$f(x)\sim\frac{a^2x^2}{2b^2x^2}=\frac{a^2}{2b^2}.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a^2}{2b^2}.$$

3. *Calculer la limite de* $f(x)=x^2\operatorname{tg}^2 \pi/x$ *quand x tend vers* $+\infty$.

Puisque $\operatorname{tg} \pi/x$ tend vers 0,

$$\operatorname{tg} \pi/x \sim \pi/x\,.$$

Donc

$$\operatorname{tg}^2 \pi/x \sim \pi^2/x^2$$

et

$$f(x)\sim x^2(\pi^2/x^2)=\pi^2\,.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi^2 .$$

4. *Limite de*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2\sin x}$$

quand x tend vers 0.

Puisque $\ln(1+x) \sim x$ et que $\sin x \sim x$,

$$f(x) \sim x/2x = 1/2 .$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2 .$$

5. *Limite de*

$$f(x) = \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{2\cos x - 1}$$

quand x tend vers $\pi/3$.

Mettons 2 en facteur au numérateur comme au dénominateur, pour faire apparaitre $\cos \pi/3 = 1/2$ et $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$:

$$f(x) = \frac{\sin x - \sqrt{3}/2}{\cos x - \sqrt{3}/2} = \frac{\sin x - \sin \pi/3}{\cos x - \cos \pi/3} .$$

Or,

$$\sin x - \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{x-\pi/3}{2}\cos\frac{x+\pi/3}{2}$$

$$\cos x - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\frac{x-\pi/3}{2}\sin\frac{x+\pi/3}{2} .$$

En simplifiant par $2\sin\frac{x-\pi/3}{2}$, nous levons l'indétermination :

$$f(x) = -\frac{\cos(x/2+\pi/6)}{\sin(x/2+\pi/6)} = -\cot\left[\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right].$$

La limite cherchée est donc $-\cot \pi/3 = -1/\sqrt{3}$.

6. *Déterminer la limite, lorsque x tend vers* 0, *de*

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{3x^2 - x^3 + 2x^4} .$$

Le numérateur est équivalent à $2x^2$, et le dénominateur à $3x^2$. Il s'ensuit que $f(x)$ a une limite, à savoir $2/3$.

7. *Déterminer la limite, lorsque x tend vers* $+\infty$, *de la fonction f définie sur* $\mathbf{R}_+^*$ *par la formule*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{3x^2+x-1}}.$$

Multiplions et divisons le numérateur par $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}$, le dénominateur par $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2+x-1}$; il vient

$$f(x)=\frac{(x^2+x)-(x^2+1)}{(3x^2+2x)-(3x^2+x-1)}\,\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}\,\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}.$$

En mettant en facteur x au numérateur et dénominateur, nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\,\frac{\sqrt{3+2/x}+\sqrt{3+1/x-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1+1/x^2}} \qquad \text{(car } x>0\text{)}.$$

La continuité de la fonction racine carrée montre que $f(x)$ admet pour limite $\sqrt{3}$.

8. *Étudions la limite, lorsque x tend vers* $+\infty$, *de*

$$f(x)=(1+a/x)^x,$$

où a est un nombre réel non nul.

Remarquons que $f(x)$ se présente sous la forme indéterminée 1^∞. Introduisons donc le logarithme de $f(x)$:

$$\ln f(x)=x\ln(1+a/x).$$

Or,

$$\ln(1+a/x)\sim a/x.$$

Donc

$$\ln f(x)\sim x(a/x)=a.$$

Nous en déduisons

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=a$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^a.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}(1+a/n)^n=e^a.$$

9. *Limite de*

$$f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

quand x tend vers 0.

L'expression se présente sous la forme indéterminée 0^0. Mais

$$\ln f(x) = \operatorname{tg} x \ln \sin x\,.$$

Comme $\sin x \sim x$, nous voyons que $\ln \sin x \sim \ln x$; d'autre part, $\operatorname{tg} x \sim x$; enfin, $x \ln x$ tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

10. *Limite de*

$$f(x) = (1+2x)^{1/x}$$

quand x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée ∞^0. Or,

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+2x)\,.$$

Comme $1+2x \sim 2x$,

$$\ln (1+2x) \sim \ln 2x = \ln x + \ln 2$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0\,.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

11. *Limite de*

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

quand x tend vers $\pi/2$.

Il s'agit encore d'une forme indéterminée ∞^0. Passons aux logarithmes :

$$\ln f(x) = \cos x \ln (\operatorname{tg} x)\,.$$

Posons $h = \pi/2 - x$, et faisons tendre h vers 0 :

$$\ln f(x) = \cos (\pi/2-h) \ln \operatorname{tg} (\pi/2-h) = \sin h \ln (\cot h)\,.$$

Mais $\sin h \sim h$ et

$$\ln \cot h = -\ln \operatorname{tg} h \sim -\ln h\,;$$

donc

$$\ln f(x) \sim -h \ln h,$$

expression dont la limite est nulle.

Finalement :

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = 1.$$

12. *Limite de*

$$f(x) = (\cos x)^{1/\sin^2 x}$$

quand x tend vers 0.

Nous reconnaissons une forme indéterminée 1^∞. Prenons le logarithme de $f(x)$:

$$\ln f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \ln \cos x.$$

Or,

$$\cos x - 1 \sim -x^2/2 \ ;$$

donc

$$\ln \cos x = \ln [1 + (\cos x - 1)] \sim -x^2/2.$$

Comme $\sin^2 x \sim x^2$, nous voyons que $\ln f(x)$ tend vers $-1/2$.

Finalement :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}.$$

5.3 Utilisation des dérivées. Les dérivées apparaissent comme un cas particulier de formes indéterminées : on cherche la limite de

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

le numérateur et le dénominateur tendant vers 0. De nombreux problèmes se ramènent à la définition même des dérivées.

EXEMPLES

1. *Déterminer la limite de*

$$f(x) = \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$$

quand x tend vers a, où a est un nombre réel non nul.

Écrivons $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\dfrac{x^5 - a^5}{x - a}}{\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}}.$$

Nous savons que $(x^5-a^5)/(x-a)$ tend vers la dérivée de x^5 au point a, c'est-à-dire vers $5a^4$; de même, $(x^2-a^2)/(x-a)$ tend vers la dérivée de x^2 au point a, à savoir $2a$. Donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{5a^4}{2a} = \frac{5}{2}a^3 .$$

2. *Limite de*

$$f(x) = \frac{\sin x - \sin a}{x^{1/3} - a^{1/3}}$$

quand x tend vers a, où a est un nombre réel non nul.

Divisons encore le numérateur et le dénominateur par $x-a$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a ,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x-a} = \frac{1}{3} a^{-2/3} .$$

Donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = 3a^{2/3} \cos a .$$

3. *Limite de*

$$f(x) = \frac{\sin x/a - \sin a/x}{x-a}$$

quand x tend vers a, où a est un nombre réel non nul.

Ecrivons le numérateur sous la forme

$$\sin\frac{x}{a} - \sin\frac{a}{x} = \sin\frac{x}{a} - \sin\frac{a}{a} - \left[\sin\frac{a}{x} - \sin\frac{a}{a}\right].$$

Nous sommes ramenés à calculer les dérivées au point a des fonctions

$$g : x \mapsto \sin x/a \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto \sin a/x .$$

Or,

$$g'(x) = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{a} \qquad \text{et} \qquad h'(x) = -\frac{a}{x^2}\cos\frac{a}{x}.$$

Donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{a}\cos 1 + \frac{a}{a^2}\cos 1 = \frac{2}{a}\cos 1.$$

4. *Limite de*

$$f(x) = \frac{x^a - a^x}{\text{ch } x/a - \text{ch } a/x}$$

quand x tend vers a.

Combinons les méthodes des deux exemples précédents :

$$f(x) = \frac{x^a - a^a - (a^x - a^a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{\text{ch } x/a - \text{ch } a/a - (\text{ch } a/x - \text{ch } a/a)}.$$

Les dérivées de x^a, a^x, ch (x/a) et ch (a/x) sont respectivement

$$ax^{a-1}, \qquad a^x \ln a, \qquad \frac{1}{a}\text{sh}\frac{x}{a} \qquad \text{et} \qquad -\frac{a}{x^2}\text{sh}\frac{a}{x}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{a^{a+1}(1-\ln a)}{2 \text{ sh } 1}.$$

5.4 Exemples d'utilisation des développements limités

1. *Limite de*

$$f(x) = \frac{1}{x}[(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/3}]$$

quand x tend vers 0.

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 1, appliqué aux cas où $\alpha = 1/2$ et où $\alpha = 1/3$, montre que

$$(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 + o(x)$$
$$(1-x)^{1/3} = 1 - x/3 + o(x).$$

Donc

$$(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/3} = 5x/6 + o(x)$$

et

$$f(x) = 5/6 + o(x).$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 5/6.$$

2. *Limite de*

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$$

quand x *tend vers* 0.

Rappelons que

$$e^x=1+x+x^2/2+o(x^2)\,.$$

D'où

$$e^x-1=x+x^2/2+o(x^2)$$

et

$$\frac{e^x-1}{x}=1+x/2+o(x)\,.$$

Donc

$$\ln\frac{e^x-1}{x}\sim\frac{x}{2}.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1/2\,.$$

3. *Limite de*

$$f(x)=(\cos x+\sin x)^{1/x}$$

quand x *tend vers* 0.

Cette expression se présente sous la forme indéterminée 1^∞. Introduisons donc le logarithme de $f(x)$, qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$:

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(\cos x+\sin x)\,.$$

Formons le développement limité du numérateur à l'ordre 1 :

$$\cos x+\sin x=1+x+o(x)\,.$$

Donc

$$\ln(\cos x+\sin x)=x+o(x)$$

et

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=1.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=e\,.$$

4. *Calculer la limite, lorsque x tend vers* 0, *de*

$$f(x)=\frac{e^{\sin x}-(1+x)^{(\sin x)/x}}{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}-\cos x}.$$

Le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0. Nous savons que

$$\operatorname{tg} x = x+x^3/3+o(x^4)\,,$$
$$\cos x = 1-x^2/2+o(x^3)\,.$$

Donc

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}-\cos x = x^2/3+x^2/2+o(x^3) = 5x^2/6+o(x^3).$$

Or, $(1+x)^{(\sin x)/x} = \exp\left[\sin x\,\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]$. Mettons en facteur $e^{\sin x}$ au numérateur ; celui-ci s'écrit $-e^{\sin x}(e^u-1)$, où

$$u = \sin x\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right].$$

Lorsque x tend vers 0, il en est de même de $\sin x$ et aussi de u. Comme $e^u-1\sim u$ au voisinage de 0, le numérateur est équivalent à $-u$. La relation

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

montre que

$$\frac{\ln(1+x)}{x}-1\sim-\frac{x}{2}.$$

Comme $\sin x\sim x$, le numérateur est équivalent à $x^2/2$, et l'expression considérée a une limite, à savoir 3/5.

EXERCICES

Calculer la limite des expressions suivantes quand x tend vers 0 :

5.1 $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

5.2 $(\cos x)^{1/x}$

5.3 $\dfrac{(x+27)^{1/3}-3}{(x+16)^{1/4}-2}$

5.4 $\dfrac{2(1+x)^{1/3}-(4+x)^{1/2}}{\sqrt{9+x}-3}$

5.5 $\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$

5.6 $\dfrac{2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x}{x(1-\cos 3x)}$

5.7 $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

5.8 $\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

5.9 $\dfrac{\cos x-(\cos 2x)^{1/2}}{\sin^2 x}$

5.10 $\dfrac{\operatorname{tg} ax-ax}{x^2\operatorname{tg} ax}$

5.11 $\dfrac{\sin 5x-\operatorname{tg} 3x}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$

5.12 $x^{1/\ln 3x}$

5.13 $\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

5.14 $\dfrac{x-\operatorname{Arc\,tg} x}{x\operatorname{Arc\,tg} x}$

5.15 $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

5.16 $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$

5.17 $(1+a\operatorname{tg} x)^{1/x}$

5.18 $\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$

5.19 $(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$

5.20 $\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^x}}$.

Calculer la limite des expressions suivantes quand x tend vers $+\infty$:

5.21 $x\ln\dfrac{1+x}{x}$

5.22 $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

5.23 $\dfrac{\ln(x+1)^3}{6x}$

5.24 $(\ln x)^{1/x}$

5.25 $(e^x+x)^{1/x}$

5.26 $x^3 \ln \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} \sin \dfrac{1}{x}$

5.27 $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

5.28 $x-(x^2-1)^{1/2}$

5.29 $(\cos 2/x)^{x^2}$

5.30 $x^2(1+1/x)^x - ex^3 \ln(1+1/x)$.

Calculer la limite des expressions suivantes quand x tend vers 1 :

5.31 $(\operatorname{Arg\,th} x)^{1-x}$

5.32 $\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}$

5.33 $x^{1/1-x}$

5.34 $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$

5.35 $\dfrac{\ln \sin \pi x/2}{(x-1)^2}$

5.36 $(x-1) \operatorname{tg} \pi x/2$

5.37 $\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$

5.38 $\dfrac{1-x^\alpha}{\ln x}$ $\alpha \in \mathbf{R}$.

Calculer la limite des expressions suivantes quand x tend vers $\pi/2$:

5.39 $(\cos x)^{\cos x}$

5.40 $\dfrac{(1+2\cos x)^{1/2}-1}{x-\pi/2}$

5.41 $4x \operatorname{tg} 2x - \dfrac{\pi}{\cos 2x}$

5.42 $\left(\dfrac{\pi}{x} - 1\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Calculer les limites suivantes :

5.43 $\displaystyle\lim_{x\to\pi/6} \frac{(x-\pi/6)^2}{2\sin x - 1}$

5.44 $\displaystyle\lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\operatorname{Arc\,sin} x)^2 - \pi^2/16}{2x^2-1}$

5.45 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2-a^2}$

5.46 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a-x-a\ln a+a\ln x}{a-(2ax-x^2)^{1/2}}$.

CHAPITRE 6

INTÉGRALES IMPROPRES

Nous avons calculé jusqu'à présent des intégrales de la forme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

où f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Nous allons étendre la notion d'intégrale au cas de fonctions définies sur un intervalle *non fermé borné*.

6.1 Intégrales sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. Soit a un nombre réel. Considérons une fonction continue f sur l'intervalle $[a, +\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. Nous savons que, pour tout nombre réel x supérieur à a, la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a, x]$ est intégrable sur cet intervalle.

Soit donc F la fonction définie sur $[a, +\infty[$ par la formule

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $F(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$, on note cette limite

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ est *convergente*.

Dans le cas contraire, on dit bien entendu que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ est *divergente*.

Lorsque la fonction f est positive, on dit que f est *intégrable sur l'intervalle* $[a, +\infty[$ si son intégrale sur cet intervalle est convergente.

Il est immédiat que les fonctions dont l'intégrale sur $[a, +\infty[$ est convergente constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[a, +\infty[$.

De plus, l'application qui à une fonction intégrable sur $[a, +\infty[$ associe son intégrale sur cet intervalle est une forme linéaire.

EXEMPLES

1. *La fonction* $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$, *et*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

En effet, pour tout nombre réel x,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x},$$

et e^{-x} admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, à savoir 0.

2. *La fonction* $x \mapsto 1/(1+x^2)$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$, *et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, une primitive de $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} x$.

3. *Soit* α *un nombre réel strictement positif. La fonction* $x \mapsto 1/x^\alpha$ *est intégrable sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *si et seulement si* α *est strictement supérieur à* 1. *Dans ce cas,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

En effet, si $\alpha = 1$, pour tout nombre réel strictement positif x,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x,$$

par définition de la fonction logarithme.

Si α est différent de 1, pour tout nombre réel strictement positif x,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right).$$

4. *Montrer que l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$$

est convergente, et calculer cette intégrale.

Nous pouvons écrire le trinôme X^2+X+1 sous la forme canonique $(X+1/2)^2 + 3/4$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

et

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^x.$$

L'intégrale proposée est donc égale à

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

soit encore

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. *Etudier de même l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2(t+1)}.$$

Décomposons la fraction rationnelle $1/X^2(X+1)$ en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{A}{X^2} + \frac{B}{X} + \frac{C}{X+1}.$$

On obtient facilement $A = 1$, $B = -1$ et $C = 1$. D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(t+1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = -\frac{1}{t} + \ln\left|\frac{t+1}{t}\right|.$$

Comme $-\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, l'intégrale considérée est convergente, et vaut $1-\ln 2 \approx 0{,}31$.

Dans tous les exemples précédents, nous avons pu trouver facilement une primitive F de f. En général, il est intéressant de savoir d'avance si l'intégrale de f est convergente, sans passer par l'intermédiaire d'une primitive F et la recherche de la limite de $F(x)$. (Si l'intégrale de f est divergente, le problème ... est terminé.) De plus, on arrive à calculer certaines intégrales convergentes *sans passer par une primitive*. Enfin, il est parfois utile de savoir si une intégrale converge, même si l'on est incapable de calculer cette intégrale.

Nous allons donc chercher des règles assurant la convergence des intégrales. Ces règles reposent essentiellement sur la comparaison des fonctions (voir chap. 4) : on ramène la convergence des intégrales à celle d'intégrales de fonctions de référence, étudiées une fois pour toutes.

6.2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives. Dans le cas des fonctions à valeurs réelles positives, on peut énoncer des résultats très précis.

Soit en effet f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles positives. Alors la fonction F définie par la formule

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est croissante. Rappelons que $F(x)$ admet une limite (finie) lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si elle est majorée; dans le cas contraire, $F(x)$ tend vers $+\infty$ avec x.

Considérons deux fonctions positives f et g continues sur $[a, +\infty[$ telles que $f \leqslant g$. Alors, si l'intégrale de g sur $[a, +\infty[$ est convergente, il en est de même de l'intégrale de f sur cet intervalle. Dans ces conditions,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Soient en effet F et G les fonctions définies par les formules

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous savons que $F \leqslant G$. Si $G(x)$ tend vers une limite l lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) \leqslant G(x) \leqslant l,$$

et la fonction F est majorée. La relation (1) s'obtient alors par prolongement des inégalités : il suffit de faire tendre x vers $+\infty$.

Le théorème précédent s'énonce encore :

Si l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est divergente, il en est de même de l'intégrale de g sur cet intervalle.

EXEMPLES

1. Puisque, pour tout nombre réel x supérieur à 1,

$$e^{-x^2} \leqslant e^{-x},$$

la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Nous admettrons que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ce résultat est fondamental en calcul des probabilités.

2. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge. En effet, pour tout nombre réel non nul t,

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et nous venons de voir que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

est convergente.

Voici un corollaire très important du théorème précédent :

Si f est dominée par g au voisinage de $+\infty$, la convergence de l'intégrale de g implique celle de l'intégrale de f. Autrement dit, si l'intégrale de f diverge, il en est de même de l'intégrale de g.

En effet, par définition même, il existe un nombre réel c supérieur à a et un nombre réel strictement positif β tels que, pour tout nombre réel t supérieur à c,

$$f(t) \leqslant \beta g(t) \tag{2}$$

D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Puisque l'intégrale de g sur $[a, +\infty[$ est convergente, il découle de la relation (4) que l'intégrale de g sur $[c, +\infty[$ est convergente. Il en est évidemment de même de l'intégrale de βg. La relation (2) montre alors que l'intégrale de f sur $[c, +\infty[$ est convergente. Enfin, d'après la relation (3), l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est convergente.

En particulier, si f et g sont semblables au voisinage de $+\infty$, les intégrales de f et de g sur $[a, +\infty[$ sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

En effet, rappelons que deux fonctions f et g sont dites semblables si chacune d'elles est dominée par l'autre.

Plus particulièrement encore, si f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, les intégrales de f et de g sur $[a, +\infty[$ sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Rappelons en effet que la relation d'équivalence entre fonctions implique la relation de similitude.

EXEMPLE. *La fonction f définie par la formule*

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^\alpha}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si α est strictement supérieur à 2.

En effet, $f(x)$ est équivalent à $1/x^{\alpha-1}$ au voisinage de $+\infty$.

D'une manière générale, on utilise la *règle de Riemann* :

Soit f une fonction continue positive sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'il existe un nombre réel α tel que $t^\alpha f(t)$ admette une limite l, finie ou infinie, lorsque t tend vers $+\infty$.

Si $\alpha > 1$ et si l est finie, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $\alpha \leqslant 1$ et si l est non nulle, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

EXEMPLE. Soit β un nombre réel. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^\beta\,\mathrm{d}t$ est convergente. En effet, pour tout nombre réel α, $\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha+\beta}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Choisissons α strictement supérieur à 1 (par exemple $\alpha = 2$); la règle de Riemann nous permet de conclure.

6.3 Convergence absolue et semi-convergence. Revenons au cas général d'une fonction f à valeurs complexes. On dit que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ est *absolument convergente* si l'intégrale de la fonction $|f|$ (c'est-à-dire de la fonction qui à t associe le module de $f(t)$) est convergente.

L'intérêt de cette notion provient du fait que si l'intégrale de f est absolument convergente, l'intégrale de f est alors convergente. (Autrement dit, si l'on peut intégrer le module de f, on peut aussi intégrer la fonction f elle-même.) Nous admettrons ce résultat, qui repose sur le critère de Cauchy d'existence des limites (voir tome 1).

Le théorème précédent n'a pas de réciproque : il peut arriver que l'intégrale de f soit convergente sans qu'elle soit absolument convergente; on dit alors que l'intégrale de f est *semi-convergente.*

Soit par exemple f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/x .$$

Une intégration par parties montre que

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\right]_1^x - \mathrm{i}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

La quantité entre crochets a une limite lorsque x tend vers $+\infty$, puisque le numérateur est borné et que le dénominateur tend vers $+\infty$. L'intégrale au second membre est absolument convergente, puisque l'intégrale de $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/t^2| = 1/t^2$ sur $[1, +\infty[$ est convergente. Ainsi, le second membre de la formule (1) a une limite, ce qui montre que l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente.

Cependant, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/t| = 1/t$, et la fonction $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$; l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ n'est donc pas absolument convergente. Nous pouvons affirmer qu'elle est semi-convergente.

Soient f et g deux fonctions continues à valeurs complexes. Si l'intégrale de g sur $[a, +\infty[$ est absolument convergente et si f est dominée par g au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale de f est absolument convergente, et donc convergente. En revanche, si l'on suppose seulement que l'intégrale de g est convergente, on ne peut rien affirmer sur f sans une étude directe.

Nous voyons ainsi que la convergence absolue renseigne de manière bien plus précise que la convergence. Dans tous les problèmes, on s'efforcera de déterminer s'il y a convergence absolue ou seulement semi-convergence.

6.4 Procédés de calcul des intégrales impropres. Les procédés fondamentaux de calcul des intégrales (changement de variable et intégration par parties) s'étendent aisément au cas des intégrales impropres : il suffit de faire tendre la borne supérieure des intégrales vers $+\infty$.

Changement de variable. Soient φ une fonction à valeurs réelles continûment dérivable et strictement croissante sur $[a, +\infty[$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$$

et f une fonction continue sur l'intervalle $[\varphi(a), +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes. Alors les intégrales

$$\int_a^{+\infty} (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{\varphi(a)}^{+\infty} f(u)\, \mathrm{d}u$$

sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Dans le premier cas, elles sont égales :

$$\int_a^{+\infty} (f \circ \varphi)(t)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{+\infty} f(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

EXEMPLES

1. Nous avons vu que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2\,.$$

Il s'ensuit que la fonction $t \mapsto \exp(-t^2/2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}\,.$$

2. *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\, t\, \mathrm{d}t$$

est convergente, et égale à 1.

Posons en effet $u = t^2/2$; il vient alors

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\, t\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u\,.$$

3. Intégrale de Bertrand. *Soient a un nombre réel strictement supérieur à* 1 *et α un nombre réel. Pour que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ soit intégrable sur $[a, +\infty[$, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à* 1.

En effet, le changement de variable $u = \ln t$ montre que

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(\ln a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}}\right) \qquad \text{si } \alpha \neq 1$$

et que

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln a)\,.$$

Intégration par parties. Soient f et g deux fonctions continûment dérivables sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes. Si le produit $f(x)g(x)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$, les intégrales de fg' et de $f'g$ sur $[a, +\infty[$ sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Dans le premier cas,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)\,g(t)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t,$$

où l'expression entre crochets désigne

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a).$$

EXEMPLE. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,t^2\,\mathrm{d}t$$

est convergente, et égale à $\sqrt{\pi/2}$.

Nous pouvons en effet écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,t^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} t\exp(-t^2/2)\,t\,\mathrm{d}t \\ &= [-\exp(-t^2/2)\,t]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}.\end{aligned}$$

6.5 Intégrales sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$. Soient maintenant b un nombre réel et f une fonction continue sur $]-\infty, b]$ à valeurs réelles ou complexes. Nous savons que la fonction f est intégrable sur tout intervalle $[x, b]$, où x est un nombre réel inférieur à b.

Soit donc G la fonction définie sur $]-\infty, b]$ par la formule

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $G(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers $-\infty$, on note cette limite

$$\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que l'intégrale de f sur l'intervalle $]-\infty, b]$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f sur $]-\infty, b]$ est divergente.

6.6 Intégrales sur l'intervalle R tout entier. Considérons enfin une fonction f à valeurs complexes continue sur **R**.

Si, pour tout nombre réel c, les intégrales de la fonction f sur $]-\infty, c]$ et sur $[c, +\infty[$ sont convergentes, on dit que l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ *soit convergente est qu'il existe un tel nombre c.*

En effet, pour tout couple (c, c') de nombres réels,

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(relation de Chasles). Il s'ensuit que les intégrales de f sur $[c, +\infty[$ et sur $[c', +\infty[$ sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Il en est de même des intégrales de f sur $]-\infty, c]$ et sur $]-\infty, c']$.

Nous déduisons aussi de la relation de Chasles que si l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente, la somme

$$\int_{-\infty}^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas du nombre réel c considéré; on la note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on l'appelle intégrale de f sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

On remarquera que l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ est la limite de

$$\int_{x'}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x'}^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque x' tend vers $-\infty$ et que x tend vers $+\infty$.

Pour que l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ soit convergente, il ne suffit donc pas que

$$\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ait une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale de la fonction $f: x \mapsto x$ sur $]-\infty, +\infty[$ est divergente, quoique, pour tout nombre réel positif x,

$$\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

EXEMPLES

1. L'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$

2. La fonction $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

3. *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons d'abord que le problème a un sens, car la fonction à intégrer est équivalente à $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$; l'intégrale est convergente, d'après la règle de Riemann.

Décomposons alors la fraction rationnelle $R = X^2/(X^4+1)$ en éléments simples :

$$\frac{X^2}{X^4+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{A_k}{X - z_k},$$

où $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_k}$ et $\alpha_k = (2k+1)\pi/4$ (voir tome 1). Nous savons que

$$A_k = z_k^2/4z_k^3 = 1/4z_k = -z_k^3/4.$$

(En effet, la fraction rationnelle R admet quatre pôles simples, à savoir les racines quatrièmes de -1.) D'autre part, le tableau des primitives nous apprend que

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t - \cos\alpha_k - \mathrm{j}\sin\alpha_k} = \frac{1}{2}\ln(t^2 - 2t\cos\alpha_k + 1) + \mathrm{j}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{t-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{3} A_k \left[\frac{1}{2}\ln(t^2 - 2t\cos\alpha_k + 1) + \mathrm{j}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{t-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}\right].$$

Mais nous ne cherchons pas à expliciter une primitive; nous voulons seulement calculer la limite du second membre lorsque t tend vers $+\infty$ et lorsque t tend vers $-\infty$.

A cet effet, remarquons que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{t-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k} &= \pi/2 \text{ si } \sin\alpha_k > 0\\ &= -\pi/2 \text{ si } \sin\alpha_k < 0.\end{aligned}$$

Le premier cas se présente pour $k=0$ et $k=1$; le second cas pour $k=2$ et $k=3$. Les limites pour $-\infty$ sont les opposées des précédentes.

D'autre part, les termes en logarithmes apportent une contribution nulle à l'intégrale. En effet,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} A_k \ln(t^2 - 2t\cos\alpha_k + 1) = \frac{1}{2}(\ln t^2)\sum_{k=0}^{3} A_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} A_k \ln\left(1 - \frac{2\cos\alpha_k}{t} + \frac{1}{t^2}\right).$$

La somme des coefficients A_k est nulle, puisque le degré de X^4+1 est strictement supérieur à 1; le premier terme du second membre disparaît donc. En outre, lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\ln\left(1-\frac{2\cos\alpha_k}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$ tend vers $\ln 1=0$.

En résumé,

$$I=\mathrm{j}\pi(A_0+A_1-A_2-A_3)\,.$$

Or,

$$\mathrm{j}\,(A_0-A_3)=-\frac{\mathrm{j}}{4}\,(\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\pi/4}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\pi/4})=\frac{1}{2}\sin 3\pi/4=\sqrt{2}/4\,.$$

De même,

$$\mathrm{j}\,(A_1-A_2)=\tfrac{1}{2}\sin\pi/4=\sqrt{2}/4\,.$$

Finalement,

$$I=\pi\sqrt{2}/2\,.$$

4. Voici un exemple où un changement de variable transforme une intégrale en une intégrale impropre : calculons

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}\,.$$

La méthode générale consiste à poser $t=\operatorname{tg} x/2$; d'où $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t/(1+t^2)$ et

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{4+t^2}\,.$$

Or, d'après le tableau des primitives,

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{4+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} t/2\,.$$

Les bornes 0 et 2π deviennent dans le changement de variable 0 et … 0. La variation de $\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} t/2$ entre 0 et 0 est nulle, alors que I est strictement positive. En fait, lorsque x traverse la valeur π, t n'est pas défini. Découpons alors l'intégrale I en deux, t variant de 0 à $+\infty$ (ce qui correspond à l'intervalle $[0,\pi[$ pour x) puis de $-\infty$ à 0 (ce qui correspond à l'intervalle $]\pi,2\pi]$ pour x). Alors :

$$\begin{aligned}I&=\tfrac{1}{2}[\operatorname{Arc\,tg} t/2]_0^{+\infty}+\tfrac{1}{2}[\operatorname{Arc\,tg} t/2]_{-\infty}^{0}\\&=\tfrac{1}{2}[\pi/2-0]+\tfrac{1}{2}[0-(-\pi/2)]=\pi/4+\pi/4=\pi/2\,.\end{aligned}$$

Cet exemple montre que, *même dans des cas élémentaires, on ne peut pas se passer des intégrales impropres.*

6.7 Intégrale d'une fonction non bornée. Nous avons généralisé jusqu'ici la notion d'intégrale au cas d'un intervalle non borné. Examinons aussi le cas d'une fonction continue f sur un intervalle borné mais non fermé, de la forme $[a, b[$, où a et b sont deux nombres réels, $a<b$. Si la fonction F définie sur $[a, b[$ par la formule

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a une limite lorsque x tend vers b, on note cette limite

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit alors que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b[$ est convergente.

Si f admet une limite finie au point b (et en particulier si f est définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$), les propriétés de l'intégrale fonction de la borne supérieure montrent que la limite de $F(x)$ n'est autre que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$. La présente notion n'offre donc d'intérêt que dans le seul cas où $f(t)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque t tend vers b.

On peut alors recommencer tous les raisonnements exposés dans ce chapitre, en remplaçant chaque fois « x tend vers $+\infty$ » par « x tend vers b ».

Exemple. Soit α un nombre réel. L'intégrale

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

est convergente si et seulement si α est strictement *inférieur* à 1. (On remarquera que la règle n'est pas la même que dans le cas de l'intervalle $[a, +\infty[$.)

En effet,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} &= \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] && \text{si } \alpha\neq 1\\ &= \ln\left|\frac{b-a}{b-x}\right| && \text{si } \alpha=1.\end{aligned}$$

La *règle de Riemann* pour les fonctions positives doit être modifiée en conséquence :

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b[$. Supposons qu'il existe un nombre réel α tel que $(b-t)^\alpha f(t)$ admette une limite l, finie ou infinie, lorsque t tend vers b.

Si $\alpha<1$ et si l est finie, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $\alpha\geqslant 1$ et si l est non nulle, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

On peut encore étudier le cas des fonctions définies sur $]a, b]$, sur $]a, b[$, sur $]a, +\infty[$ et sur $]-\infty, b[$.

EXEMPLES

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Calculons

$$I = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{[(t-a)(b-t)]^{1/2}}.$$

Il est clair que $[(t-a)(b-t)]^{-1/2}$ est semblable à $(t-a)^{-1/2}$ au voisinage de a et à $(b-t)^{-1/2}$ au voisinage de b. Dans les deux cas, l'exposant est $1/2 < 1$, ce qui montre que l'intégrale est convergente.

Pour obtenir une primitive de la fonction $f\colon t \mapsto [(t-a)(b-t)]^{-1/2}$, écrivons le trinôme $(X-a)(b-X)$ sous la forme canonique :

$$(X-a)(b-X) = -X^2+(a+b)X-ab = -\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

D'où

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{[(t-a)(b-t)]^{1/2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Le changement de variable $u = t-(a+b)/2$ conduit à

$$I = \int_{(a-b)/2}^{(b-a)/2} \frac{\mathrm{d}u}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2\right]^{1/2}} = \left[\operatorname{Arc\,sin}\frac{2u}{b-a}\right]_{(a-b)/2}^{(b-a)/2} = \pi.$$

Chose étonnante, le résultat ne dépend ni de a ni de b.

2. Voici un exemple célèbre, dû à L. Euler, où l'on peut calculer une intégrale impropre sans passer par les primitives :

$$A = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x.$$

En posant $x = \pi/2 - t$, la première intégrale devient

$$A = -\int_{\pi/2}^{0} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = B.$$

La convergence de A est ainsi ramenée à celle de B. Or, puisque $\sin t$ est équivalent à t au voisinage de 0, nous voyons que $\ln\sin t$ est équivalent à $\ln t$.

Comme

$$\int \ln t \, \mathrm{d}t = t(\ln t - 1),$$

nous voyons que l'intégrale de $\ln t$ sur $]0, \pi/2]$ est convergente. Il en est donc de même de l'intégrale B.

En faisant la somme $A+B$, on trouve

$$A+B = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\,.$$

$$A+B = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

La première intégrale vaut $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Calculons la seconde :

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,\mathrm{d}x$$

en posant $2x = u$, d'où $2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln \sin u\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u\,\mathrm{d}u\right].$$

Et comme $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u\,\mathrm{d}u$ se transforme en posant $u = \pi - v$ suivant

$$\int_{\pi/2}^{0} \ln \sin v(-\mathrm{d}v) = \int_0^{\pi/2} \ln \sin v\,\mathrm{d}v = B$$

on obtient :

$$J = B = A\,.$$

Donc la relation (1) devient

$$2A = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + A$$

soit

$$A = B = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

6.8 Cas où la fonction devient infinie entre les bornes. Il peut enfin arriver que la fonction f devienne infinie à l'intérieur de l'intervalle d'intégration. Il est donc indispensable, *avant d'intégrer*, d'étudier la continuité de la fonction f, sans quoi l'on risque d'obtenir un résultat faux, ainsi qu'on va le voir.

EXEMPLE. *Calculer*

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Sans prendre de précaution, on obtiendrait

$$I = [-1/x]_{-1}^{1} = -2,$$

résultat complètement faux! En effet, la fonction $t \mapsto 1/t^2$ devient infinie dans l'intervalle $]-1, 1[$ (Fig. 6.1).

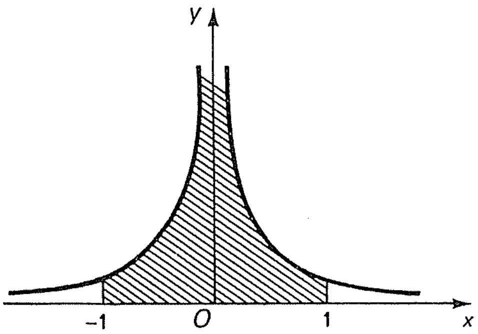


FIG. 6.1

Il faut en réalité écrire deux intégrales : de -1 à 0, puis de 0 à 1. Mais nous savons que l'intégrale de 0 à 1 de cette fonction est divergente. Le problème posé n'avait donc pas de sens.

EXERCICES

Calculs d'intégrales impropres

Calculer les intégrales suivantes, après en avoir étudié la convergence :

6.1 $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6.2 $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$

6.3 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$

6.4 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

6.5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$

6.6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{1/2}}$

6.7 $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

6.8 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

6.9 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$

6.10 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$

6.11 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

6.12 $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} dx$

6.13 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

6.14 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $\quad a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a \neq b$

6.15 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$

6.16 $\displaystyle\int_1^{10} \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$

6.17 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

6.18 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$

6.19 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{(1-x^2)^{1/2}}$

6.20 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$

6.21 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)(1-x^2)^{1/2}}$

6.22 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x + \operatorname{sh}^4 x}$

6.23 $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

6.24 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2+x)(1-x^2)^{1/2}}$

6.25 $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} dx$

6.26 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-x}{1-x^3}\,dx$

6.27 $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$

6.28 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

6.29 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} \, dx$

6.30 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x^2} \, dx$

6.31 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx$

6.32 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{(1+x^3)^2} \, dx$

6.33 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2(1-x^2)^{1/2} + (1-x^2)}$

6.34 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

6.35 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

6.36 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

6.37 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+10)(1+x)^{1/2}}$

6.38 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x \sin x \, dx$

6.39 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$

6.40 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx$.

Convergence des intégrales

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

6.41 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{1}{x} \, dx$

6.42 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$

6.43 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, dx$

6.44 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \, dx \quad \alpha > 0$

6.45 $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \sin \frac{1}{x} \, dx$

6.46 $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \cos \frac{1}{x} \, dx$.

CHAPITRE 7

SÉRIES NUMÉRIQUES

7.1 Définitions. Nous avons déjà introduit au tome 1 la notion de *suite* d'éléments d'un ensemble F : c'est une application définie sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels à valeurs dans F. A l'entier 0 correspond l'élément u_0 de F, à l'entier 1 correspond l'élément $u_1, \ldots$, à l'entier n correspond l'élément $u_n, \ldots$

Dans ce chapitre, nous prendrons pour F l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Les suites d'éléments de F sont des suites de nombres; on les appelle suites *numériques*.

Étant donnée une suite numérique (u_n), on construit une nouvelle suite (s_n) en posant

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_n .$$

Ainsi, $s_0 = u_0$, $s_1 = u_0 + u_1$, $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$, etc.

Le couple constitué des deux suites (u_n) et (s_n) s'appelle *série numérique*. La suite (u_n) s'appelle *terme général* de la série. Pour tout entier naturel n, s_n s'appelle *somme à l'ordre n*.

Remarquons que la donnée de la suite (s_n) permet de reconstituer la suite (u_n). En effet :

$$u_n = s_n - s_{n-1} \qquad \text{si } n \neq 0$$
$$u_0 = s_0 .$$

On dit que la série de terme général (u_n) est *convergente* si la suite (s_n) est convergente, *divergente* dans le cas contraire. Lorsque la série est convergente, la limite s de la suite (s_n) s'appelle *somme* de la série, et se note

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

Dans ces conditions, la différence r_n entre s et la somme à l'ordre n s'appelle *reste à l'ordre n* :

$$r_n = s - s_n .$$

C'est la limite lorsque q tend vers $+\infty$ de $s_q - s_n = \sum_{p=n+1}^{q} u_p$; c'est pourquoi on emploie la notation

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p .$$

Comme nous le verrons tout le long de ce chapitre, l'étude d'une série numérique ressemble beaucoup à celle d'une intégrale généralisée. Ainsi, il est intéressant de savoir d'avance si une série est convergente sans passer par l'intermédiaire du calcul de s_n et de sa limite s. (Si la série est divergente, une fois encore le problème est terminé.) Il est d'ailleurs assez rare que l'on puisse calculer la valeur exacte de la somme s d'une série convergente. A défaut, on se contente d'une valeur numérique approchée de s. On remplace d'habitude s par s_n, et l'on essaie de majorer l'erreur commise, à savoir $r_n = s - s_n$.

7.2 Série géométrique. Illustrons ce qui précède par un exemple ... que nous connaissons déjà pour l'avoir étudié au tome 1. On appelle *suite géométrique* une suite de la forme (r^n), où r est un nombre complexe. La série de terme général (r^n) s'appelle bien entendu *série géométrique*. Nous savons que

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} && \text{si} \quad r \neq 1 \\ &= n+1 && \text{si} \quad r = 1. \end{aligned}$$

De plus, s_n a une limite, à savoir $1/(1-r)$, si et seulement si $|r| < 1$; autrement dit, la série géométrique est convergente si et seulement si $|r| < 1$, et sa somme est alors

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Le reste à l'ordre n est

$$r_n = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

7.3 Séries définies à partir d'un certain rang. Dans certains cas, le terme général (u_n) d'une série n'est pas défini à partir du rang 0, mais seulement *à partir d'un certain rang.*

Ainsi, la *série de Riemann* a pour terme général $(1/n^\alpha)$, où $\alpha \in \mathbf{R}$; ce terme général est défini pour $n \geqslant 1$. Lorsque $\alpha = 1$, la série précédente prend le nom de *série harmonique.* (Nous verrons au chapitre 9 que les fréquences multiples d'une fréquence fondamentale sont dites harmoniques. Les longueurs des tuyaux d'un orgue donnant l'harmonique n et le son fondamental sont dans le rapport de 1 à n, ce qui explique la terminologie employée.)

Nous recontrerons encore les *séries de Bertrand*, de terme général $(1/n(\ln n)^\alpha)$. Ici, le logarithme népérien de n doit être défini et non nul; le terme général est donc défini seulement si $n \geqslant 2$.

7.4 Opérations linéaires sur les séries. Les opérations linéaires sur les séries sont définies comme dans les suites.

Considérons deux séries A et B, de termes généraux (u_n) et (v_n). On appelle *somme* de ces deux séries, et on note $A+B$, la série de terme général (u_n+v_n). Il est immédiat que

$$\sum_{p=0}^{n} (u_p+v_p) = \sum_{p=0}^{n} u_p + \sum_{p=0}^{n} v_p.$$

Ainsi, lorsqu'on fait la somme de deux séries, on obtient la somme à l'ordre n de la série $A+B$ en ajoutant les sommes à l'ordre n des séries A et B.

De même, soit α un nombre complexe. Le *produit* de la série A par α est la série, notée αA, de terme général (αu_n). Comme

$$\sum_{p=0}^{n} \alpha u_p = \alpha \sum_{p=0}^{n} u_p,$$

nous voyons que la somme à l'ordre n de la série αA est le produit par α de la somme à l'ordre n de la série A.

Les opérations linéaires sur les séries sont donc aussi simples que dans le cas des suites. Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble des séries de nombres complexes est un espace vectoriel sur **C**.

De plus, nous savons que les suites convergentes constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites, et que l'application $(u_n) \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire. Nous pouvons traduire cet énoncé dans le langage des séries : les séries convergentes constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries, et l'application qui à toute série convergente fait correspondre sa somme est une forme linéaire.

Considérons maintenant deux séries, A et B, et supposons que A converge. Pour que $A+B$ converge, il faut et il suffit que B converge.

En effet, si B converge, nous savons que $A+B$ converge. Réciproquement, si $A+B$ converge, il en est de même de B, puisque $B=(A+B)-A$.

En revanche, il peut arriver que la somme de deux séries divergentes soit convergente. Par exemple, soit A une série divergente, de terme général (u_n). Alors la série B de terme général $(-u_n)$ est divergente. Cependant, la série $A+B$ est la série nulle, évidemment convergente.

Enfin, on ne modifie pas la nature d'une série en multipliant celle-ci par un scalaire non nul.

7.5 Modification d'un ensemble fini de termes d'une série. Considérons une série A dont le terme général (u_n) est nul à partir d'un certain rang n_0. Alors la somme à l'ordre n est constante à partir du rang n_0 ; c'est ce qu'on appelle une suite stationnaire (cf. tome 1). Une telle suite est évidemment convergente. Autrement dit, la série A converge.

Soient maintenant B et C deux séries de termes généraux (v_n) et (w_n). Si l'ensemble des entiers n tels que $v_n \neq w_n$ est fini, les séries B et C sont de même nature (c'est-à-dire toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

En effet, la série $A=C-B$ a tous ses termes nuls à partir d'un certain rang; elle est donc convergente. La relation $C=A+B$ montre que C s'obtient en ajoutant B à la série convergente A. Les séries B et C sont donc de même nature.

En pratique, on utilise souvent ce résultat pour modifier les premiers termes d'une série. Par exemple, on peut ramener le cas d'une série dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang n_0 au cas d'une série de nombres réels positifs en modifiant les termes $u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}$. La nature de la série n'est pas changée (mais la somme n'est plus la même).

7.6 Condition nécessaire de convergence. Nous allons profiter de la forme particulière de la suite (s_n) des sommes partielles d'une série pour énoncer des règles de convergence propres aux séries. Voici d'abord une condition *nécessaire* :

Pour qu'une série numérique converge, il faut que son terme général tende vers 0.

En effet, si s_n tend vers une limite s, alors s_{n-1} tend aussi vers s, et $u_n = s_n - s_{n-1}$ tend vers $s - s = 0$.

Nous pouvons ainsi affirmer que la série de terme général $(n/(3n+1))$ est divergente. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1/3 \neq 0 .$$

De même, la série de terme général (e^{-1/n^2}) est divergente, car son terme général tend vers 1.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Considérons par exemple la série harmonique, de terme général $(1/n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cependant, cette série est divergente. En effet,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Supposons par l'absurde que s_n tende vers une limite l. Alors s_{2n} tend vers la même limite 1, et $s_{2n} - s_n$ tend vers $l - l = 0$. Le prolongement des inégalités montre que $0 \geqslant 1/2$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, la série harmonique est divergente, quoique son terme général tende vers 0.

7.7 Critère de Cauchy. Nous avons déjà rencontré au tome 1 une condition nécessaire et suffisante de convergence des suites de nombres réels ou complexes : c'est le critère de Cauchy, de grande importance théorique (mais ... inutilisable sur un exemple numérique). Ce critère s'applique à la suite (s_n) des sommes partielles d'une série de la manière suivante :

Pour qu'une série de terme général (u_n) converge, il faut et il suffit que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels satisfaisant à la relation $n_0 \leqslant p < q$,

$$|u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q| \leqslant \varepsilon .$$

7.8 Calcul de la somme d'une série. Nous avons vu qu'il est possible de calculer la somme d'une série géométrique. Voici deux autres exemples où l'on peut calculer la somme d'une série (et en même temps prouver la convergence) :

1. *Série de terme général* $\left(\dfrac{1}{n(n-1)}\right)$, $n \geqslant 2$. Décomposons la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X-1)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}.$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

et

$$s_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

On voit ainsi que la série est convergente, et que sa somme est

$$s = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

2. *Série de terme général* $\left(\text{Arc tg}\,\frac{1}{1+n+n^2}\right)$. Rappelons la formule

$$\text{Arc tg}\, a - \text{Arc tg}\, b = \text{Arc tg}\,\frac{a-b}{1+ab} \qquad \text{si} \quad ab > -1.$$

Nous voyons ainsi que

$$u_n = \text{Arc tg}\,\frac{1}{1+n+n^2} = \text{Arc tg}\,\frac{n+1-n}{1+n(n+1)} = \text{Arc tg}(n+1) - \text{Arc tg}\, n.$$

D'où

$$\begin{aligned} s_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= \text{Arc tg}\,1 - \text{Arc tg}\,0 + \text{Arc tg}\,2 - \text{Arc tg}\,1 + \ldots + \text{Arc tg}\,(n+1) - \text{Arc tg}\,n \\ &= \text{Arc tg}\,(n+1). \end{aligned}$$

On voit ainsi que la série est convergente et que sa somme est

$$s = \lim_{n \to +\infty} \text{Arc tg}(n+1) = \pi/2.$$

En résumé, pour simplifier une somme, on peut parfois remplacer chaque terme par une différence de deux autres termes.

On verra d'autres procédés de calcul de la somme d'une série au chapitre suivant.

Nous allons maintenant étudier en détail les séries de nombres réels positifs, pour revenir enfin au cas général.

SÉRIES DE NOMBRES RÉELS POSITIFS

Dans cette partie, on considère des séries dont tous les termes sont réels positifs. D'après le n° 7.5, on peut ramener à ce cas l'étude des séries de termes *positifs à partir d'un certain rang.*

7.9 Comparaison des séries de nombres réels positifs. Dans le cas des séries de nombres réels positifs, on peut énoncer des résultats très précis.

Soit en effet A une série de nombres réels positifs. Alors la suite (s_n) des sommes partielles est croissante, puisque

$$s_n = s_{n-1} + u_n \geqslant s_{n-1} .$$

Rappelons que la suite (s_n) est convergente si et seulement si elle est majorée (cf. tome 1); dans le cas contraire, s_n tend vers $+\infty$.

Considérons maintenant deux séries A et B de nombres réels positifs, de termes généraux (u_n) et (v_n), telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$. Alors, si la série B est convergente, il en est de même de la série A. Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n . \tag{1}$$

Soient en effet s_n et t_n les sommes partielles à l'ordre n des séries A et B. Il est immédiat que, pour tout entier naturel n, $s_n \leqslant t_n$. Si t_n tend vers une limite t lorsque n tend vers $+\infty$, alors

$$s_n \leqslant t_n \leqslant t ,$$

et la suite (s_n) est majorée. La relation (1) s'obtient alors par prolongement des inégalités.

Le théorème précédent s'énonce encore :

Si la série A est divergente, il en est de même de la série B.

Exemples

1. Considérons la série A de terme général $(1/n^n)$, où $n \geqslant 1$. A partir du rang 2,

$$\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Comme la série géométrique de raison 1/2 est convergente, il en est de même de la série A.

2. Considérons la série B de terme général $(1/\sqrt{n})$, où $n \geqslant 1$. Comme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$$

et que la série harmonique, de terme général $(1/n)$, est divergente, la série B est divergente.

3. Nous avons vu que la série de terme général $(1/n(n-1))$ est convergente. Puisque

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)},$$

nous en déduisons que la série de terme général $(1/n^2)$ est convergente.

7.10 Comparaison directe des séries de nombres réels positifs. Le théorème précédent s'utilise surtout sous la forme que voici :

Si la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), la convergence de la série B implique celle de la série A. (Autrement dit, si A diverge, il en est de même de B.)

En effet, par définition même (cf. chap. 4), il existe un entier naturel n_0 et un nombre réel strictement positif β tels que, pour tout entier naturel n supérieur à n_0,

$$u_n \leqslant \beta v_n .$$

Considérons la série C dont le terme général (w_n) est défini par les formules

$$\begin{aligned} w_n &= \beta v_n && \text{si } n \geqslant n_0 \\ &= u_n && \text{si } n < n_0 . \end{aligned}$$

Supposons que la série B converge. Il en est alors de même de la série βB, et donc de la série C, puisque le terme général de $\beta B - C$ est nul à partir du rang n_0. Il en découle que A est convergente, puisque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant w_n$.

En particulier, si u_n et v_n sont semblables, les séries A et B sont de même nature.

En effet, rappelons que deux suites (u_n) et (v_n) sont dites semblables si chacune est dominée par l'autre.

Plus particulièrement encore, si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, les séries A et B sont de même nature.

Rappelons en effet que la relation d'équivalence entre suites implique la relation de similitude.

EXEMPLE. Soit r un nombre réel strictement positif. La série de terme général $((2+\sin n)r^n)$ est convergente si et seulement si $r<1$.

En effet, $(2+\sin n)r^n$ est semblable à r^n. Nous sommes donc ramenés au cas d'une série géométrique.

Il nous reste à appliquer tous ces résultats en prenant pour A ou B une série de référence, dont la nature a été étudiée une fois pour toutes; c'est le cas par exemple de la série géométrique, ou de la série harmonique. Pour obtenir d'autres séries de référence, on compare les séries de nombres réels positifs à des intégrales généralisées.

7.11 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives, décroissante et telle que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0 .$$

Soit A la série dont le terme général (u_n) est défini par la formule

$$u_n = f(n) .$$

Pour que la série A converge, il faut et il suffit que l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$

soit convergente. Dans ces conditions, on obtient un encadrement du reste :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Puisque f est décroissante, pour tout entier naturel n et pour tout point t de $[n, n+1]$,

$$u_{n+1} \leqslant f(t) \leqslant u_n.$$

Intégrons les trois membres entre n et $n+1$. Comme $\int_n^{n+1} dt = 1$, nous obtenons

$$u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n. \tag{2}$$

Sur la figure 7.1, les termes u_{n+1} et u_n sont représentés respectivement par les aires des rectangles $MNPQ$ et $MNP'Q'$. L'aire du trapèze curviligne $MNPQ'$, égale à l'intégrale de f entre n et $n+1$, est encadrée par les aires de ces deux rectangles.

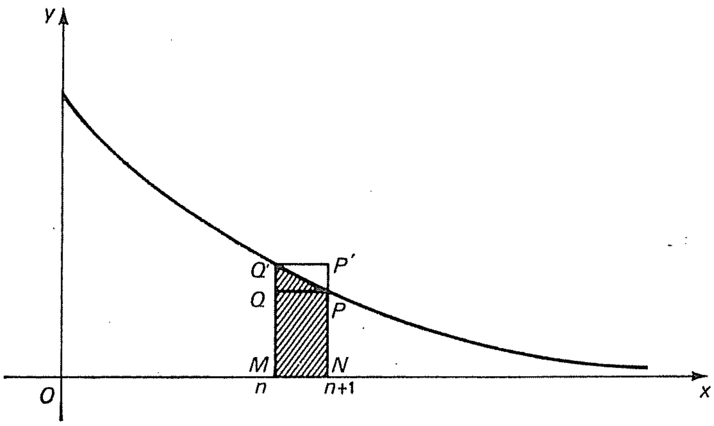


FIG. 7.1

Nous déduisons aussitôt de la relation (2) que

$$s_{n+1} - u_0 \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant s_n. \tag{3}$$

Si la série A converge, s_n est majorée, et l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est convergente. Si l'intégrale de f est convergente, s_{n+1} est majorée, et la série est convergente.

Enfin, la relation (1) s'obtient par prolongement des inégalités.

Remarque. Le théorème précédent s'étend aussitôt au cas où la fonction f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a \geqslant 0$.

EXEMPLES

1. Série de Riemann. *Soit α un nombre réel. Pour que la série de terme général $(1/n^{\alpha})$ converge, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à* 1.

Le cas où $\alpha \leqslant 0$ est évident, car le terme général ne converge pas vers 0. Lorsque $\alpha > 0$, il suffit d'appliquer le théorème au cas où la fonction f est définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par la formule $f(t) = 1/t^{\alpha}$. On est alors ramené au cas de la convergence d'une intégrale (cf. nº 6.1).

2. Série de Bertrand. *Soit α un nombre réel. Pour que la série de terme général $[(1/n(\ln n)^{\alpha})$ converge, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à* 1.

Soit en effet f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par la formule

$$f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^{\alpha}}.$$

La fonction f est dérivable, et

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{t}\left(1 + \frac{\alpha}{\ln t}\right).$$

Par suite, il existe un nombre réel $a \geqslant 2$ tel que f soit décroissante sur $[a, +\infty[$. (Mais f n'est pas toujours décroissante sur $[2, +\infty[$.) On peut donc appliquer le théorème précédent, qui nous ramène à la convergence des intégrales de Bertrand (nº 6.4).

Ces exemples fondamentaux nous permettent de retrouver la divergence de la série harmonique (série de Riemann où $\alpha = 1$, ou encore série de Bertrand où $\alpha = 0$), de la série de terme général $(1/\sqrt{n})$ (série de Riemann où $\alpha = 1/2 \leqslant 1$) et la convergence de la série de terme général $(1/n^2)$ (série de Riemann où $\alpha = 2 > 1$).

7.12 Règle de Cauchy. En prenant pour série de référence la série gométrique, nous pouvons déduire du nº 7.10 la règle suivante :

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\sqrt[n]{u_n}$ admette une limite k.
Si $k < 1$, la série de terme général (u_n) converge.
Si $k > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.

Supposons d'abord $k < 1$, et considérons un élément r de $]k, 1[$. Il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant r$. Par conséquent, (u_n) est dominé par (r^n). Comme $r < 1$, la série géométrique de terme général (r^n) est convergente. Il en est donc de même de la série de terme général (u_n).

Supposons maintenant $k > 1$. A partir d'un certain rang n_0, u_n est supérieur à 1, ce qui montre que u_n ne tend pas vers 0 et que la série de terme général (u_n) est divergente.

Remarque. Si $k = 1$, on ne peut pas conclure à l'aide de la règle de Cauchy; ce cas est dit douteux. Cependant, si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 en restant supérieur à 1, le raisonnement précédent s'applique encore et montre que la série diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.

EXEMPLES

1. Étudions la série dont le terme général est défini par

$$u_n = (\operatorname{tg}(a+b/n))^n,$$

où $a \in]0, \pi/2[$ et où $b \in \mathbf{R}$.

Il est clair que $\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg}(a+b/n)$ a pour limite tg a.

Si tg $a < 1$, c'est-à-dire si $a \in]0, \pi/4[$, la série est convergente.

Si tg $a > 1$, c'est-à-dire si $a \in]\pi/4, \pi/2[$, la série est divergente.

Enfin, si tg $a = 1$, c'est-à-dire si $a = \pi/4$, la règle de Cauchy ne s'applique pas. On peut cependant faire une étude directe. En effet,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{n}\right) = \frac{1+\operatorname{tg} b/n}{1-\operatorname{tg} b/n}.$$

Donc

$$\ln u_n = n \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{n}\right) = n \ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{b}{n}\right) - n \ln\left(1-\operatorname{tg}\frac{b}{n}\right).$$

Comme $\operatorname{tg} b/n \sim b/n$, nous voyons que $\ln u_n$ tend vers $2b$. Par suite, u_n tend vers $e^{2b} \neq 0$. La série est donc divergente.

2. *Considérons la série dont le terme général est défini par*

$$u_n = (1-1/n)^{n^\beta},$$

où $\beta \in \mathbf{R}_+$.

Pour chercher la limite de $\sqrt[n]{u_n}$, passons par l'intermédiaire des logarithmes :

$$\ln \sqrt[n]{u_n} = n^{\beta-1} \ln(1-1/n) \sim -n^{\beta-2}.$$

Ainsi, lorsque $\beta \geqslant 2$, la série converge; lorsque $\beta < 2$, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 par valeurs inférieures, et la règle de Cauchy ne permet pas de conclure. Cependant, si $\beta \in [0, 1[$, u_n tend vers 1; si $\beta = 1$, u_n tend vers $1/e$. La série est donc divergente si $\beta \in [0, 1]$.

7.13 Règle de Riemann. En prenant pour série de référence la série de Riemann, nous pouvons déduire du n° 7.10 la règle suivante :

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Supposons qu'il existe un nombre réel α tel que $n^\alpha u_n$ admette une limite l, finie ou infinie.

Si $\alpha > 1$ et si l est finie, alors la série de terme général (u_n) converge.

Si $\alpha \leqslant 1$ et si l est non nulle, alors la série de terme général (u_n) diverge.

En effet, dans le premier cas, (u_n) est dominé par le terme général d'une série de Riemann convergente; dans le second cas, (u_n) domine le terme général d'une série de Riemann divergente.

EXEMPLES

1. Soit la série de terme général $\left(\ln \dfrac{\text{ch } 1/n}{\cos 1/n}\right)$. Comme

$$u_n = \ln \text{ch} \frac{1}{n} - \ln \cos \frac{1}{n},$$

nous voyons aisément que $n^2 u_n$ tend vers 1. Puisque 2 est strictement supérieur à 1, la série est convergente.

2. Reprenons l'exemple où

$$u_n = (1-1/n)^{n^\beta}.$$

Pour tout nombre réel α, étudions la limite de $n^\alpha u_n$ en passant par les logarithmes :

$$\ln (n^\alpha u_n) = \alpha \ln n + n^\beta \ln (1-1/n) .$$

Supposons d'abord que $\beta > 1$. Alors $\ln (n^\alpha u_n) \sim -n^{\beta-1}$. Par suite, $n^\alpha u_n$ tend vers 0. Il suffit de choisir $\alpha > 1$ (par exemple $\alpha = 2$) pour voir que la série converge.

Supposons maintenant que $\beta \leqslant 1$. Alors $\ln (n^\alpha u_n) \sim \alpha \ln n$. Par suite, $n^\alpha u_n$ tend vers $+\infty$. Il suffit de choisir $\alpha \leqslant 1$ (par exemple $\alpha = 1$) pour voir que la série diverge.

(L'étude du n° 7.12 ne permettait pas de conclure lorsque $\beta \in]1, 2[$.)

7.14 Comparaison logarithmique des séries. Voici une variante de la comparaison des séries, souvent commode sur des exemples :

Soient A et B deux séries de nombres réels strictement positifs, de termes généraux (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors, si la série B converge, il en est de même de la série A.

En effet, nous pouvons écrire successivement :

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

$$\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \leqslant \frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

En multipliant toutes ces inégalités membre à membre, nous obtenons

$$u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n .$$

La suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), et la comparaison directe s'applique.

7.15 Règle de D'Alembert. Traditionnellement, on prend pour la suite (v_n) une suite géométrique. On obtient alors l'énoncé suivant :

Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que u_{n+1}/u_n admette une limite k.

Si $k < 1$, la série de terme général (u_n) converge.

Si $k > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.

Supposons d'abord $k < 1$, et considérons un élément r de $]k, 1[$. Il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1}/u_n \leqslant r$. Autrement dit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{r^{n+1}}{r^n}.$$

La série géométrique de terme général (r^n) étant convergente, il en est de même de la série de terme général (u_n).

Supposons maintenant $k > 1$. A partir d'un certain rang n_0, u_{n+1}/u_n est supérieur à 1, ce qui implique $u_n > u_{n_0}$. Le terme général (u_n) ne tend donc pas vers 0, et la série est divergente.

Remarque. Si $k = 1$, on rencontre encore un cas douteux, à moins que u_{n+1}/u_n ne tende vers 1 par valeurs supérieures, auquel cas (u_n) ne tend pas vers 0.

D'autre part, les règles de D'Alembert et de Cauchy se ressemblent énormément : il s'agit dans les deux cas de la comparaison d'une série à une série géométrique. (Mais on n'aura pas la naïveté d'appliquer l'une de ces règles ... à une série géométrique, que l'on comparerait à elle-même!) On peut démontrer que si u_{n+1}/u_n tend vers une limite k, alors $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers la même limite k. Ainsi, lorsqu'on est dans le cas douteux pour la règle de D'Alembert, il est bien inutile d'appliquer la règle de Cauchy : on se retrouverait encore dans le cas douteux!

En pratique, on emploie la règle de Cauchy s'il y a un exposant n dans l'expression de u_n ; on emploie la règle de D'Alembert s'il y a des factorielles, qui se simplifient dans le rapport u_{n+1}/u_n.

Si la règle de D'Alembert ou la règle de Cauchy ne permet pas d'aboutir, on essaiera la règle de Riemann.

Exemples

1. Étudions la série de terme général $(n!/n^n)$. Vu la présence d'une factorielle, essayons d'appliquer la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n.$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} (1+1/n)^n = e .$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 ,$$

et la série est convergente.

2. Soit la série de terme général $(2n/(n+2^n))$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}} \to \frac{1}{2} .$$

La série est donc convergente.

3. Soit la série de terme général $\left(\dfrac{3n-1}{n^4+1}\right)$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{3n-1} \frac{n^4+1}{(n+1)^4+1} \to 1 .$$

La règle de D'Alembert ne s'applique donc pas.

Au lieu d'utiliser la règle de Riemann, il est plus rapide de déterminer directement la partie principale de (u_n). En effet,

$$u_n \sim 3/n^3 .$$

La suite (u_n) est donc équivalente à la suite $(3/n^3)$, ou encore semblable à la suite $(1/n^3)$. Puisque $3 > 1$, la série de terme général (u_n) est convergente.

CONVERGENCE ABSOLUE ET SEMI-CONVERGENCE

Revenons au cas général d'une suite (u_n) de nombres complexes. Nous allons voir un cas fondamental où l'on peut se ramener à une suite de nombres réels positifs.

7.16 Convergence absolue. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On dit que la série de terme général (u_n) est *absolument convergente* si la série de terme général $(|u_n|)$ est convergente.

L'intérêt de cette notion provient du théorème suivant :

Toute série absolument convergente est convergente.

La démonstration repose sur le critère de Cauchy, employé comme condition nécessaire, puis comme condition suffisante. Soit en effet ε un nombre réel strictement positif. Puisque la série de terme général $(|u_n|)$ est convergente, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, la relation

$n_0 \leqslant p < q$ implique

$$|u_{p+1}|+|u_{p+2}|+\ldots+|u_q| \leqslant \varepsilon\,.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots+u_q| \leqslant |u_{p+1}|+|u_{p+2}|+\ldots+|u_q| \leqslant \varepsilon\,.$$

Le critère de Cauchy montre alors que la série de terme général (u_n) est convergente.

EXEMPLES

1. La série de terme général (e^{nix}/n^2), où $x \in \mathbf{R}$, est absolument convergente. En effet,

$$|u_n| = |e^{nix}/n^2| = 1/n^2\,,$$

et la série de terme général $(1/n^2)$ est une série de Riemann convergente, puisque $2 > 1$. La série proposée est donc absolument convergente et, par suite, convergente.

2. De même, la série de terme général $((\sin nx)/n^{3/2})$ est absolument convergente. En effet,

$$\left|\frac{\sin nx}{n^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

7.17 Séries alternées. Le théorème précédent n'a pas de réciproque : il peut arriver qu'une série soit convergente sans être absolument convergente; on dit alors qu'elle est *semi-convergente*.

Nous allons voir un cas particulier très fréquent où l'on peut étudier directement la convergence sans passer par la convergence absolue. Nous pourrons alors donner des exemples de séries semi-convergentes. Introduisons à cet effet la définition suivante :

On dit qu'une série de nombres réels est *alternée* si son terme général est de la forme

$$u_n = (-1)^n a_n\,,$$

où (a_n) est une suite de nombres réels positifs. (Autrement dit, les termes sont alternativement positifs et négatifs.)

Voici une condition *suffisante* (mais non nécessaire) de convergence des séries alternées :

Si a_n décroît et tend vers 0, *la série de terme général (u_n) est convergente.*

En effet, la suite des sommes partielles de rang impair est croissante :

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geqslant s_{2n-1}\,.$$

De même, la suite des sommes partielles de rang pair est décroissante :

$$s_{2n} = s_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leqslant s_{2n-2}\,.$$

En outre,

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leqslant s_{2n} .$$

Par conséquent,

$$s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n-2} \leqslant \dots \leqslant s_0 .$$

La suite (s_{2n+1}), étant croissante et majorée, admet une limite s (voir tome 1). De même,

$$s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_{2n-1} \geqslant \dots \geqslant s_1 .$$

La suite (s_{2n}), étant décroissante et minorée, admet une limite s'. Enfin, en passant à la limite dans la relation

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} ,$$

on voit que $s = s'$ (puisque u_{2n+1} tend vers 0).

Ainsi, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$,

$$|s_{2n+1} - s| \leqslant \varepsilon .$$

De même, il existe un entier naturel n'_0 tel que, si $n \geqslant n'_0$,

$$|s_{2n} - s| \leqslant \varepsilon .$$

Donc, dès que $n \geqslant \sup(2n_0 + 1, 2n'_0)$,

$$|s_n - s| \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui montre que la série considérée est convergente.

On notera au passage que *le reste à l'ordre n est du même signe que le premier terme négligé*; *de plus*,

$$|r_n| \leqslant |u_n| .$$

En effet, il découle de l'encadrement

$$s_{2n-1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$$

que

$$0 \leqslant r_{2n-1} \leqslant s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} .$$

De même, la relation

$$s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$$

implique

$$u_{2n+1} = -a_{2n+1} \leqslant r_{2n} \leqslant 0 .$$

Exemples

1. La *série harmonique alternée*, de terme général $((-1)^n/n)$, est convergente. En effet, $1/n$ décroît et tend vers 0. De plus, cette série n'est pas absolument convergente, puisque $|u_n| = 1/n$ et que la série harmonique est divergente. Nous avons donc trouvé un exemple de série semi-convergente.

2. Plus généralement, pour tout nombre réel strictement positif α, la *série de Riemann alternée*, de terme général $((-1)^n/n^\alpha)$, est convergente. Si $\alpha > 1$, cette série est absolument convergente; si $\alpha \leqslant 1$, elle est seulement semi-convergente.

7.18 Remarque finale. On notera soigneusement que la comparaison des séries de nombres réels positifs ne s'étend pas au cas général des séries de nombres complexes.

Considérons en effet deux suites (u_n) et (v_n) de nombres complexes telles que $u_n \sim v_n$. Il peut arriver que la série de terme général (u_n) converge, et que la série de terme général (v_n) diverge. C'est le cas par exemple si

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

La première série est une série de Riemann alternée, convergente. La seconde série est la somme d'une série convergente et d'une série divergente; elle est donc divergente (voir n° 7.4).

En dehors du cas où u_n est réel de signe constant, on ne peut donc conclure en remplaçant u_n par un équivalent.

En pratique, on n'applique la condition suffisante de convergence des séries alternées que dans le seul cas où il est évident que $|u_n|$ décroît. Sinon, on introduit la partie principale v_n de u_n. Si la condition suffisante de convergence s'applique à v_n, l'étude n'est pas terminée! Pour que la série de terme général (u_n) converge, il faut et il suffit que la série de terme général $(u_n - v_n)$ converge (n° 7.4).

Exemple. — Étudions le cas où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$

Il est clair que $u_n \sim v_n = (-1)^n/n$. Formons

$$w_n = u_n - v_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1-(-1)^n/n} - 1\right) = \frac{1}{n^2(1-(-1)^n/n)}.$$

Comme w_n est de signe constant, nous pouvons étudier la nature de la série de terme général (w_n) en prenant un équivalent (ce que nous n'avions pas le droit de faire pour u_n). Or, $w_n \sim 1/n^2$. La série de terme général (w_n) est convergente; il en est donc de même de la série de terme général (u_n). On remarquera que cette dernière série est seulement semi-convergente.

EXERCICES

Convergence des séries

Étudier les séries dont le terme général (u_n) est défini de la façon suivante :

7.1 $u_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$

7.2 $u_n = n^2/n!$

7.3 $u_n = \dfrac{1}{5+n}$

7.4 $u_n = \operatorname{tg} \pi/\sqrt{n}$

7.5 $u_n = n/2^n$

7.6 $u_n = \sin(n+a/n)\pi$

7.7 $u_n = \dfrac{n}{1+a^n}$

7.8 $u_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

7.9 $u_n = \dfrac{1}{n}\sin \pi/\sqrt{n}$

7.10 $u_n = \dfrac{1}{x^n+1/x^n}$ $\quad x \in \mathbf{R}^*$

7.11 $u_n = \mathrm{e}^{-(n^2+1)/(n+1)}$

7.12 $u_n = (\ln n)^{-n}$

7.13 $u_n = \dfrac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots (2n-1)}$

7.14 $u_n = \ln(1+1/n^2)$

7.15 $u_n = \dfrac{n^3}{(n+1)!}$

7.16 $u_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3}$

7.17 $u_n = \sin^n(a+b/n)$

7.18 $u_n = \dfrac{\ln n!}{n!}$

7.19 $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$

7.20 $u_n = (1+1/n)^{n+1/n} - \mathrm{e}$

7.21 $u_n = (1+1/n^2)^n - 1$

7.22 $u_n = (n \sin 1/n)^{n^2} - \mathrm{e}^{-1/6}$

7.23 $u_n = (-1)^n \ln \dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1}$

7.24 $u_n = \sin \pi\sqrt{n^2+1}$

7.25 $u_n = \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

7.26 $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

7.27 $u_n = \dfrac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n^n}$ $\quad x \in \mathbf{R}_+^*$

7.28 $u_n = \ln(\operatorname{th} n)$

7.29 $u_n = (\ln\cos 1/n)\cdot(\ln\sin 1/n)$

7.30 $u_n = (\cos 1/n)^{n^\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbf{R}_+^*$

Calculs de sommes de séries

Étudier la convergence et calculer la somme des séries dont le terme général (u_n) est défini de la façon suivante :

7.31 $u_n = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{n^2+3n+3}$

7.32 $u_n = \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$

7.33 $u_n = \ln\left[1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right]$

7.34 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

7.35 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$

7.36 $u_n = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2^n}$

(on pourra établir et utiliser la relation $\operatorname{tg} x = \cot x - 2 \cot 2x$).

CHAPITRE 8

SÉRIES ENTIÈRES

8.1 Séries de fonctions. Nous avons rencontré jusqu'ici des séries numériques, c'est-à-dire des séries dont le terme général (u_n) est une suite de nombres, réels ou complexes. Nous allons étudier maintenant le cas où u_n est une *fonction.*

Plus précisément, pour tout entier naturel n, considérons une fonction u_n d'une variable réelle. L'exemple fondamental est celui de la suite géométrique : à tout nombre réel x, la fonction u_n associe le nombre x^n. Dans ce chapitre, nous examinerons plus généralement le cas où u_n est une fonction monomiale; autrement dit,

$$u_n(x) = a_n x^n, \qquad \text{où } a_n \in \mathbf{C}.$$

La série de terme général (u_n) est appelée *série entière.*

Le chapitre suivant sera consacré au cas où u_n est une fonction circulaire, de la forme

$$u_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

où A_n et B_n sont des constantes (réelles ou complexes).

La somme à l'ordre n de la série de fonctions de terme général (u_n) est la fonction s_n définie par la formule

$$s_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u_p(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x).$$

Ainsi, la somme à l'ordre n d'une série entière est une fonction polynomiale de degré inférieur à n :

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

8.2 Convergence simple et convergence uniforme. Le premier problème posé par l'étude des séries de fonctions est celui de la convergence de la série *numérique* de terme général $(u_n(x))$ pour une valeur donnée de la variable x. Ce problème se traite avec les méthodes du chapitre précédent : règle de D'Alembert, règle de Cauchy, règle de Riemann, etc. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ tel que, pour tout point x de I, la série de terme général $(u_n(x))$ converge. La fonction s, somme de la série de fonctions, est définie par la formule

$$s(x) = \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

On dit que la série de terme général (u_n) converge *simplement* sur I.

Par définition même, la convergence simple garantit seulement la convergence de la série numérique de terme général $(u_n(x))$ en tout point x de I; elle ne permet pas d'affirmer le moindre résultat sur les propriétés de la fonction s. Par exemple, chacune des fonctions u_n peut être continue, sans que la fonction s le soit.

Pour pouvoir déduire certaines propriétés de la somme s à partir de celles des fonctions u_n, on est amené à introduire une notion plus restrictive que celle de convergence simple; c'est la *convergence uniforme.*

On dit que la série de terme général (u_n) converge uniformément sur l'intervalle I s'il existe une fonction f telle que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur à n_0 et pour tout point x de I,

$$|s_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon .$$

(Contrairement au cas de la convergence simple, on impose à n_0 d'être choisi indépendamment de x.) On vérifie facilement que la convergence uniforme implique la convergence simple; plus précisément, la fonction f est unique et est égale à la limite simple s. (Mais la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme!)

En pratique, on utilise surtout la *condition de Weierstrass* :

Pour que la série de terme général (u_n) converge uniformément sur I, il suffit qu'il existe une série convergente de nombres réels positifs de terme général (v_n) telle que, pour tout point x de I,

$$|u_n(x)| \leqslant v_n .$$

Ainsi, la série de terme général $\left(\dfrac{\cos nx}{n^2}\right)$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$, puisque, pour tout nombre réel x,

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et que la série de terme général $(1/n^2)$ est convergente.

De même, la série de terme général (x^n) est uniformément convergente sur $[-1/2, 1/2]$, puisque, pour tout point x de cet intervalle,

$$|x^n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

et que la série géométrique de raison $1/2$ est convergente.

8.3 Propriétés des séries uniformément convergentes. Signalons sans démonstration quelques conséquences de la convergence uniforme.

Si la série de fonctions de terme général (u_n) converge uniformément sur I et si, pour tout entier naturel n, u_n est continue, alors la somme s est continue. (On montre par récurrence sur n que la somme s_n à l'ordre n est une fonction continue; mais il n'est pas évident que la somme d'une série de fonctions continues est continue. De plus, ce résultat... peut être faux s'il n'y a pas convergence uniforme.)

Dans ces conditions, pour tout couple (a, b) de points de I,

$$\int_a^b s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t .$$

Autrement dit, pour calculer l'intégrale de la somme d'une série uniformément convergente, on peut intégrer terme à terme.

Enfin, si, pour tout entier naturel n, u_n est dérivable et si la série de terme général (u'_n) est uniformément convergente sur I, alors s est dérivable, et

$$s' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n .$$

Autrement dit, on peut calculer la dérivée de la somme de la série en dérivant terme à terme.

Nous allons appliquer toutes ces conditions suffisantes au cas des séries entières, en commençant par chercher sur quels intervalles une telle série converge uniformément.

PROPRIÉTÉS DES SÉRIES ENTIÈRES

8.4 Intervalle de convergence. La théorie des séries entières repose sur le *lemme d'Abel* :

Soit x_0 un nombre réel strictement positif. Si la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, la série entière de terme général $(a_n x^n)$ est absolument convergente sur l'intervalle $]-x_0, x_0[$, et uniformément convergente sur tout intervalle $[-r, r]$, où $0 < r < x_0$.

En effet, soit b un nombre réel positif tel que, pour tout entier naturel n, $|a_n x_0^n| \leqslant b$. Alors

$$|a_n x^n| \leqslant b\,|x/x_0|^n .$$

La condition $|x| < x_0$, c'est-à-dire $|x/x_0| < 1$, implique la convergence absolue. La condition $|x| \leqslant r$, c'est-à-dire $|x/x_0| \leqslant r/x_0 < 1$, implique la convergence uniforme, d'après la condition de Weierstrass.

Ces résultats s'appliquent en particulier si la série converge au point x_0 : en effet, le terme général d'une série convergente a pour limite 0; pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que la condition $n \geqslant n_0$ implique $|u_n(x_0)| \leqslant \varepsilon$; il existe donc un majorant de la suite $(|a_n x_0^n|)$, à savoir

$$b = \sup(|a_0|, |a_1 x_0|, \cdots, |a_{n_0-1} x_0^{n_0-1}|, \varepsilon).$$

Il découle du lemme d'Abel que l'ensemble des nombres réels positifs r tels que la série numérique de terme général $(a_n r^n)$ converge est un intervalle d'origine 0.

Ou bien cet intervalle est borné; il admet donc une borne supérieure R. Dans ce cas, la série entière converge absolument en tout point de l'intervalle $]-R, R[$, et uniformément sur tout intervalle $[-r, r]$, où $0 < r < R$; elle diverge en tout point extérieur à $[-R, R]$.

Ou bien cet intervalle est $[0, +\infty[$. Dans ce cas, la série entière converge absolument en tout point de $]-\infty, +\infty[$, et uniformément sur tout intervalle $[-r, r]$, où r est un nombre réel strictement positif. On convient alors de dire que R est égal à $+\infty$.

Dans les deux cas, l'intervalle $]-R, R[$ s'appelle *intervalle de convergence* de la série entière, et R s'appelle *rayon de convergence*.

Lorsque $x = R$ ou $x = -R$, la série entière peut être convergente ou divergente; on ne peut énoncer de résultat général. Il convient de faire une étude directe de la série entière donnée.

En pratique, pour déterminer le rayon de convergence R, on étudie la convergence de la série de terme général $(|a_n x^n|)$, dite *série des modules.* On emploie à cet effet la règle de D'Alembert ou la règle de Cauchy.

8.5 Exemples

1. *Intervalle de convergence de la série entière*

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots .$$

C'est la série géométrique de raison x; elle est convergente si et seulement si $|x| < 1$. L'intervalle de convergence est $]-1, 1[$, et le rayon de convergence est 1. On notera que cette série est divergente si $x = 1$ ou si $x = -1$, car son terme général ne tend pas vers 0.

2. *Intervalle de convergence de la série entière*

$$\frac{kx}{1} + \frac{(kx)^2}{2} + \frac{(kx)^3}{3} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n} + \cdots,$$

où k est un nombre réel strictement positif.

La règle de D'Alembert appliquée à la série des modules donne

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{k^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{k^n |x|^n} = \frac{n}{n+1} k|x|$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = k|x| .$$

La série est convergente lorsque $k|x| < 1$, soit $|x| < 1/k$.

Son rayon de convergence est $R = 1/k$ et son intervalle de convergence est $]-1/k, +1/k[$.

Lorsque $x = 1/k$, on reconnaît la série harmonique; il y a donc divergence; lorsque $x = -1/k$, on reconnaît la série harmonique alternée; il y a donc semi-convergence.

3. *Intervalle de convergence de la série entère*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Formons

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} .$$

Pour tout nombre réel non nul, ce rapport tend vers 0; la série entière est donc absolument convergente en tout point x de **R**. L'intervalle de convergence est $]-\infty, +\infty[$, et le rayon de convergence est $+\infty$.

4. *Intervalle de convergence de la série entière*

$$\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\cdots.$$

La règle de D'Alembert appliquée à la série des modules donne :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{|x|^n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}|x|.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2|x|}{(n+1)^2}=|x|.$$

La série est convergente si $|x|<1$. Son rayon de convergence est $R=1$ et son intervalle de convergence est $]-1, +1[$.

Pour $x=\pm1$, $|u_n|=1/n^2$. Cette série de Riemann est convergente, donc la série entière converge pour $x=\pm1$.

5. *Intervalle de convergence de la série entière*

$$1+x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots.$$

Remarquons que, pour tout nombre réel non nul x, $|(nx)^n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La série entière converge seulement pour $x=0$; son rayon de convergence est nul.

8.6 Dérivation et intégration des séries entières. A partir des propriétés de la convergence uniforme, on montre que la somme d'une série entière est une fonction continue, et même indéfiniment dérivable, sur son intervalle de convergence. Plus précisément, si

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

alors

$$s'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots.$$

On peut donc dériver une série entière terme à terme; de plus, la série dérivée ainsi obtenue a le même rayon de convergence R que la série donnée.

De même, on obtient l'unique primitive de s s'annulant à l'origine en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots.$$

Le rayon de convergence de la série intégrée terme à terme est encore égal à R.

Par exemple, considérons la somme de la série géométrique :

$$s(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \qquad R=1.$$

Alors

$$s'(x) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \qquad R=1$$

et

$$\int_0^x s(t)\,dt = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \qquad R=1.$$

8.7 Opérations algébriques sur les séries entières

Addition. Considérons deux séries entières de termes généraux $(a_n x^n)$ et $(b_n x^n)$, de rayons de convergence R_1 et R_2. La somme de ces deux séries est encore une série entière, de terme général $((a_n + b_n)x^n)$.

Rappelons que la somme de deux séries convergentes est encore convergente; donc, si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ (c'est-à-dire si $|x|$ est strictement inférieur au plus petit des deux nombres R_1 et R_2), chacune des deux séries converge, et il en est de même de leur somme. Le rayon de convergence R de la somme de deux séries entières vérifie donc l'inégalité :

$$R \geqslant \inf(R_1, R_2).$$

Plus précisément, si $R_1 \neq R_2$, alors $R = \inf(R_1, R_2)$; mais si $R_1 = R_2$, on ne peut conclure sans une étude directe. Par exemple, si $a_n = -b_n = 1$, alors $R_1 = R_2 = 1$, tandis que $R = +\infty$.

Enfin, si $|x| < \inf(R_1, R_2)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Multiplication par un scalaire. Soit k un nombre complexe. Le produit de la série entière de terme général $(a_n x^n)$ par k est la série entière de terme général $(ka_n x^n)$. Si $k \neq 0$, cette série a le même rayon de convergence R que la série initiale; mais si $k = 0$, elle a pour rayon de convergence $+\infty$. De plus, si $|x| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ka_n x^n = k\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Multiplication. On appelle produit des deux séries entières de termes généraux $(a_n x^n)$ et $(b_n x^n)$ la série entière de terme général $(c_n x^n)$, où

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

(On remarquera l'analogie avec le produit de deux polynômes; cf. tome 1.)

On démontre que le rayon de convergence R de la série produit est supérieur à $\inf(R_1, R_2)$. De plus, si $|x| < \inf(R_1, R_2)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIE ENTIÈRE

Nous venons de voir que les règles de calcul sur les séries entières (dérivation, intégration, addition, multiplication) ressemblent énormément aux règles correspondantes sur les fonctions polynomiales. De plus, les séries entières se prêtent fort bien au calcul numérique. Il est donc intéressant de pouvoir représenter une fonction donnée comme la somme d'une série entière.

8.8 Fonctions développables en série entière. Considérons une fonction f à valeurs complexes définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. On dit que f est *développable en série entière* sur I s'il existe une série entière dont l'intervalle de convergence contient I et dont la somme coïncide avec f sur I :

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Nous avons vu que la somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence. Ainsi, pour que f soit développable en série entière, il faut que f soit indéfiniment dérivable sur I.

EXEMPLES

1. La fonction $f: x \mapsto |x|$ n'est pas développable en série entière, car elle n'est pas dérivable à l'origine.

2. La fonction $f: x \mapsto \operatorname{Arg\,ch} x$ n'est pas développable en série entière, car elle n'est pas définie à l'origine.

3. Nous savons que, pour tout nombre réel x de valeur absolue strictement inférieure à 1, la série géométrique de raison x est convergente, et que

$$(2) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Autrement dit, la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = 1/1-x$ est développable en série entière, et

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad R = 1.$$

4. En remplaçant x par $-x$, nous obtenons

$$(3) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad R = 1.$$

On obtient de même

$$(4) \qquad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(5) \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \qquad R = 1.$$

5. En intégrant les relations (3), (4) et (5), nous obtenons d'autres développements en série entière, ayant encore le même rayon de convergence :

$$(6) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(7) \qquad \operatorname{Arg\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(8) \qquad \operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad R = 1.$$

En effet, $\ln(1+x)$ est l'unique primitive de $1/(1+x)$ s'annulant à l'origine. De même pour $\operatorname{Arg\,th} x$ et pour $\operatorname{Arc\,tg} x$.

La formule (7) s'écrit encore

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) \qquad R = 1.$$

Cette dernière expression permet de calculer les logarithmes népériens de *tous* les nombres réels positifs, alors que la formule (6) n'est valable que si $-1 < x < 1$. En effet, lorsque x varie entre -1 et 1, $(1+x)/(1-x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.

Calculons par exemple ln 2 par ce procédé. Cherchons tout d'abord la valeur de x telle que

$$\frac{1+x}{1-x} = 2.$$

Nous obtenons $x = 1/3$. Par suite,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \cdots\right).$$

On trouve avec 7 décimales exactes

$$\ln 2 \approx 0{,}693\,147\,1.$$

6. Pour tout nombre complexe non nul a,

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-x/a}.$$

Développons $\dfrac{1}{1-x/a}$ en série entière, en utilisant les résultats précédents :

$$\frac{1}{1-x/a} = 1 + \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{a}\right)^n + \cdots$$

avec $|x/a| < 1$, soit $|x| < |a|$ ou $R = |a|$.

Donc

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \cdots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \cdots \qquad R = |a|.$$

8.9 Série de Maclaurin. Remplaçons x par 0 dans la relation (1); nous voyons que a_0 est nécessairement égal à $f(0)$. Dérivons maintenant les deux membres de la relation (1) :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots .$$

Remplaçons x par 0; il vient

$$f'(0) = a_1 .$$

Dérivons enfin p fois de suite les deux membres de (1) :

$$f^{(p)}(x) = p!\,a_p + \frac{(p+1)!}{1!} a_{p+1}\, x + \cdots + \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} + \cdots .$$

Remplaçons x par 0 :

$$f^{(p)}(0) = p!\,a_p .$$

Le développement en série entière de f est donc unique; la série entière de terme général $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right)$ s'appelle *série de Maclaurin* associée à f.

(Puisque la fonction f est indéfiniment dérivable, f admet un développement limité à tout ordre n; voir chapitre 4. On obtient ce développement limité en ne conservant que les monômes de degré inférieur à n dans la série de Maclaurin associée à f.)

Nous avons donc prouvé l'unicité du développement en série entière de f. Il reste à voir s'il existe effectivement un tel développement. Plus précisément, en dehors du cas de la somme d'une série géométrique, on peut commencer par former la série de Maclaurin associée à f. On détermine alors son intervalle de convergence. Mais, même si la série de Maclaurin converge, il n'est pas toujours vrai que sa somme est égale à f.

En résumé, on doit procéder aux deux vérifications suivantes :

a) voir si la série de Maclaurin converge;
b) voir si la somme de cette série est égale à f.

Rappelons la formule de Maclaurin-Lagrange (voir tome 2) :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x),$$

où $r_n(x)$ est le reste de Maclaurin-Lagrange :

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad 0<\theta<1 .$$

Pour que f soit développable en série entière sur I, il faut et il suffit que $r_n(x)$ tende vers 0 *en tout point x de I.*

En effet, si f est développable en série entière, la série de Maclaurin converge; autrement dit, pour tout point x de I,

$$s_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$$

converge vers $f(x)$, et le reste $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$ tend vers 0.

Réciproquement, si $r_n(x)$ tend vers 0, alors $s_n(x)$ tend vers $f(x)$. En passant à la limite, nous obtenons

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots,$$

ce qui montre que f est bien la somme de sa série de Maclaurin.

Dans de nombreux cas, on utilise la condition *suffisante* ci-dessous :

Pour que f soit développable en série entière sur I, il suffit que, pour tout nombre réel strictement positif r appartenant à I, il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout point x de $[-r, r]$ *et pour tout entier naturel n,*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M .$$

Autrement dit, toutes les dérivées successives de f sont majorées en module par un même nombre M (indépendant de n et de x).

En effet, dans ces conditions,

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} M ,$$

et la suite $(r^{n+1}/(n+1)!)$ converge vers 0. (On peut remarquer que c'est le terme général d'une série convergente étudiée au nº 8.5.)

EXEMPLES

1. *Développement de* e^x *en série entière.* Toutes les dérivées de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont égales à e^x; elles prennent la valeur 1 à l'origine. Ainsi, la série de Maclaurin de la fonction exponentielle est

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

De plus, pour tout nombre réel strictement positif r et pour tout élément x de $[-r, r]$,

$$\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^r .$$

En prenant M égal à e^r, on voit que, pour tout point x de $[-r, r]$, e^x est égal à la somme de sa série de Maclaurin; comme r est quelconque, ce résultat est valable pour tout nombre réel x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots \qquad R = +\infty.$$

En particulier, lorsque $x = 1$, nous obtenons

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \cdots \quad \text{résultat déjà annoncé au tome 1}.$$

2. En remplaçant x par $-x$, nous obtenons

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad R = +\infty.$$

Faisons la demi-somme et la demi-différence de ces deux séries entières; il vient :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty.$$

3. Le calcul des dérivées successives de $\cos x$ et de $\sin x$ a été effectué au chapitre 4. Rappelons que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x, ces dérivées sont majorées en valeur absolue par 1. En prenant $M = 1$, nous obtenons les développements suivants :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty.$$

8.10 Fonctions d'une variable complexe. On peut étendre la théorie des séries entières au cas d'une variable complexe : le terme général est cette fois $(a_n z^n)$, où a_n et z sont des nombres complexes.

On prolonge les fonctions exponentielle, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, cosinus et sinus en posant :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots + \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty.$$

Ces séries convergent pour tout nombre complexe z; c'est pourquoi l'on a encore écrit que le rayon de convergence est $+\infty$.

On vérifie que si le nombre complexe z est écrit sous la forme $x+\mathrm{j}y$, où x et y sont réels, alors

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{j}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{j}y} = \mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{j}\sin y).$$

En particulier,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}y} = \cos y+\mathrm{j}\sin y,$$

ce qui justifie la notation introduite au tome 1 pour les nombres complexes de module 1.

D'autre part, les formules d'Euler restent valables dans le cas d'une variable complexe :

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{2}, \qquad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{2\mathrm{j}},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

En remplaçant z par $\mathrm{j}z$ dans ces relations, nous obtenons aussitôt (puisque $\mathrm{j}^2 = -1$)

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{j}z &= \operatorname{ch} z & \sin \mathrm{j}z &= \mathrm{j}\operatorname{sh} z \\ \operatorname{ch} \mathrm{j}z &= \cos z & \operatorname{sh} \mathrm{j}z &= \mathrm{j}\sin z. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{j}x &= \operatorname{ch} x & \sin \mathrm{j}x &= \mathrm{j}\operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} \mathrm{j}x &= \cos x & \operatorname{sh} \mathrm{j}x &= \mathrm{j}\sin \mathrm{x}. \end{aligned}$$

Ces formules expliquent l'analogie frappante entre les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques (voir tome 2).

8.11 Série du binôme. Nous savons déjà (voir tome 1) que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x,

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}x^n.$$

Remplaçons n par un nombre réel α. La fonction $f\colon x \mapsto (1+x)^\alpha$ n'est plus une fonction polynomiale; on ne peut donc la représenter par la somme d'un nombre fini de monômes, mais on peut espérer trouver un développement en série entière.

Les dérivées successives sont

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ \dotfill & \dotfill \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \\ \dotfill & \dotfill \end{array}$$

La série de Maclaurin est donc

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{1}$$

En employant la règle de D'Alembert, nous voyons facilement que le rayon de convergence est 1.

Malheureusement, il n'existe pas dans le présent cas de nombre réel positif M majorant toutes les dérivées de f, même si $x=0$. Pour montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle de convergence $]-1, 1[$, on utilise l'artifice suivant : on remarque que

$$f'(x)=\frac{\alpha}{1+x}f(x).$$

Autrement dit, f est une solution de l'équation différentielle

$$(1+x)y'=\alpha y \tag{2}$$

(voir tome 4), prenant la valeur 1 à l'origine. Or, la relation

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{1+x}$$

implique que toutes les solutions de l'équation (2) sont proportionnelles à $(1+x)^\alpha$. Il existe donc au plus une telle solution prenant la valeur 1 à l'origine (à savoir f elle-même). En outre, on vérifie que la somme de la série de Maclaurin (1) est solution de l'équation différentielle (2). Finalement :

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad R=1. \tag{3}$$

Nous verrons d'autres applications de cette méthode au moment des équations différentielles (voir tome 4).

EXEMPLES

1. Prenons $\alpha=-1$; nous retrouvons

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad R=1.$$

2. Prenons $\alpha=1/2$; nous obtenons

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}x^n+\cdots \qquad R=1.$$

3. Prenons $\alpha=-1/2$; nous obtenons cette fois

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n+\cdots \qquad R=1.$$

Remplaçons x par x^2 :

$$\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}+\cdots \qquad R=1.$$

Intégrons les deux membres; nous obtenons le développement en série entière de Arg sh x :

$$\operatorname{Arg\,sh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{4!}{2^4(2!)^2}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^r \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\frac{x^{2r+1}}{2r+1} + \cdots \qquad R = 1.$$

Remplaçons enfin x par $-x^2$:

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots \qquad R = 1.$$

En intégrant les deux membres, nous obtenons le développement en série entière de Arc sin x :

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{4!}{2^4(2!)^2}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\frac{x^{2r+1}}{2r+1} + \cdots \qquad R = 1.$$

Si nous donnons à x la valeur $1/2$, nous trouvons la valeur de Arc sin $1/2 = \pi/6$ sous forme de la somme d'une série numérique :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}\,\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n+1}}.$$

Cette formule se prête très bien au calcul numérique de π; elle fournit

$\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$

à $1/10^9$ près par défaut.

8.12 Somme d'une série entière. On peut calculer les sommes de certaines séries entières en se ramenant aux développements en série des fonctions usuelles. On pourra employer les procédés suivants :

— multiplication par x;
— division par x;
— intégration;
— dérivation;
— changement de variable $x = t^2$ si $x \geqslant 0$, $x = -t^2$ si $x \leqslant 0$.

EXEMPLES

1. *Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière*

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \cdots$$

Appliquons la règle de D'Alembert à la série des modules :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\,\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = |x|\,\frac{n}{n+2}.$$

La limite est $|x|$, ce qui montre que $R = 1$.

Pour calculer la somme, remarquons que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}$$

et

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

La première somme est égale à $-\ln(1-x)$; pour calculer la seconde, mettons $1/x$ en facteur :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x].$$

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1-x}{x} \ln(1-x)+1 \qquad R=1.$$

2. *Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière*

$$1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\cdots+\frac{x^n}{2n+1}+\cdots$$

En appliquant la règle de D'Alembert à la série des modules, on voit aisément que $R=1$.

Pour nous ramener aux séries entières usuelles, posons $x=t^2$ si $x>0$. Nous obtenons

$$1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\cdots+\frac{t^{2n}}{2n+1}+\cdots,$$

soit encore

$$\frac{1}{t}\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\cdots+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right) = \frac{1}{t}\operatorname{Arg\,th} t.$$

Revenons en x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arg\,th} \sqrt{x} \qquad 0<x<1.$$

Lorsque $x<0$, on pose $x=-t^2$. On obtient cette fois

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{-x} \qquad -1<x<0.$$

8.13 Application aux séries numériques. La théorie des séries entières permet de calculer la somme de certaines séries numériques : on essayera de reconnaître la somme d'une série entière pour une valeur convenable de x.

EXEMPLES

1. *Calculer la somme de la série de terme général* $((-1)^n/n!)$.

Nous reconnaissons le développement en série entière de e^x lorsque $x = -1$. Ainsi :

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots = \frac{1}{e}.$$

2. *Calculer la somme de la série de terme général* $(n/2^n)$.

Considérons la série géométrique

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad R = 1.$$

Dérivons les deux membres :

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad R = 1.$$

Il suffit alors de remplacer x par $1/2$ (valeur appartenant à l'intervalle de convergence) pour obtenir

$$1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2.$$

3. *Calculer la somme de la série harmonique alternée, de terme général* $((-1)^{n+1}/n)$.

On est tenté de remplacer x par 1 dans le développement en série entière de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots \tag{1}$$

Mais 1 n'appartient pas à l'intervalle de convergence $]-1, 1[$; il n'est donc pas évident que la formule (1) reste valable lorsque $x = 1$.

Cependant, pour tout élément x de $[0, 1]$, la série (1) est alternée. Le reste à l'ordre n est majoré en valeur absolue par $x^{n+1}/(n+1)$, et à plus forte raison par $1/n$. Nous obtenons ainsi une majoration du reste indépendante de x. La série entière converge uniformément sur $[0, 1]$, et sa somme est une fonction continue sur cet intervalle. Il suffit alors de faire tendre x vers 1 dans les deux membres de (1) pour obtenir

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2.$$

4. Le même raisonnement montre que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICES

Rayons de convergence

Étudier la convergence des séries entières dont le terme général est défini par :

8.1 $\left(\frac{x}{n}\right)^n$

8.2 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

8.3 $n(n+1)\,x^n$

8.4 $n^2\,x^n$

8.5 $\frac{x^n}{n^{n+1}}$

8.6 $\frac{x^{n-1}}{2^n}$

8.7 $\frac{x^n}{(2n)^2}$

8.8 $\frac{x^n}{n\,3^n}$

8.9 $\frac{(n+1)\,x^n}{4^n}$

8.10 $\frac{x^n}{2^n\,n^2}$

8.11 $\frac{(n^2-1)\,x^n}{n^3+2}$

8.12 $\frac{x^n}{(2n-1)\,2^n}$

8.13 $\frac{(n+1)\,x^n}{n\,!}$

8.14 $\frac{\ln n}{n}\,x^n$

8.15 $\frac{(2n+1)\,x^{n-1}}{2n-1}$

8.16 $\frac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}\,x^n.$

Sommes de séries entières

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

8.17 $\frac{x^n}{(n-1)\,n}$

8.18 $\frac{x^n}{(n-2)\,(n-1)\,n}$

8.19 $\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

8.20 $\frac{x^{4n+3}}{(4n+1)\,(4n+2)\,(4n+3)}$

8.21 $(-1)^{n-1}\,\frac{n}{(n+1)\,(n+2)}\,x^n$

8.22 $\frac{x^{3n}}{(3n)\,!}$

8.23 $\dfrac{n}{(n-1)!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n$ **8.24** $\left(\sum_{p=1}^{n} p^2\, C_n^p\right) z^n$.

$\alpha \in \mathbf{R}$

Développements en série entière

Développer en série entière les fonctions suivantes, en indiquant le rayon de convergence :

8.25 $\dfrac{1}{3+x}$ **8.26** $\cos^3 x$

8.27 $\ln(4+x)$ **8.28** $\dfrac{1+3x^2}{(1-x)^3}$

8.29 $\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$ **8.30** $\exp(x\cos\alpha)\cos(x\sin\alpha)$

8.31 $\operatorname{ch} x \cos x$ **8.32** $\ln(1+x+x^2)$

8.33 $(1+x)\ln(1+x)$ **8.34** $\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

CHAPITRE 9

SÉRIES DE FOURIER

Les travaux de J.B.J. Fourier (1791-1867) ont montré que certaines fonctions périodiques peuvent être représentées comme la somme d'une série de fonctions trigonométriques. A cet effet, nous devons d'abord étudier les propriétés d'une telle série.

9.1 Séries trigonométriques. On appelle ainsi une série de fonctions dont le terme général est de la forme $x \mapsto A_n \cos nx + B_n \sin nx$, où n est un entier naturel, A_n et B_n des nombres réels. En pratique, on omet le terme $B_0 \sin 0x$, nul quel que soit x. En un point où la série est convergente, sa somme est notée

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \tag{1}$$

ou encore

$$\begin{aligned} S(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots \end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto \cos nx$ et $x \mapsto \sin nx$ admettent toutes 2π pour période. Si la série converge pour tout nombre réel x, un passage à la limite montre facilement que la somme S admet encore 2π pour période.

Dans certaines applications, il est commode de ne faire apparaître que des sinus, ou que des cosinus. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_n \cos nx + B_n \sin nx &= Y_n \sin (nx + \varphi_n) \\ &= Y_n \sin (nx - \theta_n) \\ &= Y_n \cos (nx + \alpha_n) \\ &= Y_n \cos (nx - \beta_n)\,, \end{aligned}$$

où $Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = -\operatorname{tg} \theta_n = A_n/B_n$, $\operatorname{tg} \beta_n = -\operatorname{tg} \alpha_n = B_n/A_n$.

La formule (1) devient par exemple

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \sin (nx + \varphi_n).$$

On obtient des expressions analogues dans les trois autres cas.

Forme complexe d'une série trigonométrique. En appliquant les formules d'Euler (cf. tome 1), nous obtenons une nouvelle forme, dite complexe. Écrivons en effet

$$\cos nx = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}.$$

Alors

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \tfrac{1}{2}(e^{jnx} + e^{-jnx}) + B_n \frac{1}{2j}(e^{jnx} - e^{-jnx})].$$

Ordonnons le terme entre crochets :

$$S(x) = A_0 + \sum_{1}^{+\infty} \left[\frac{e^{jnx}}{2}(A_n - jB_n) + \frac{e^{-jnx}}{2}(A_n + jB_n)\right].$$

Posons $C_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n)$ et $C_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + jB_n)$,
nous remarquons déjà que ces deux coefficients sont des nombres complexes conjugués :

$$C_{-n} = \overline{C_n}.$$

La série peut donc s'écrire sous la forme complexe :

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n e^{jnx} + C_{-n} e^{-jnx}). \tag{2}$$

Ainsi, nous pouvons considérer une série trigonométrique comme une série de fonctions de la forme $x \mapsto C_n e^{jnx}$, où C_n est un nombre complexe, mais où, cette fois, *l'ensemble des indices est* $\mathbf{Z}$, *et non plus* $\mathbf{N}$.

Réciproquement, on peut passer de la forme (2) à la forme (1) en séparant les parties réelle et imaginaire.

9.2 Fonctions orthogonales. Considérons l'espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ des fonctions continues sur un même intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, où $a < b$. Comme nous l'avons constaté au tome 2, l'application

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{3}$$

est une forme bilinéaire symétrique satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) pour tout élément f de E, le nombre réel $\int_a^b f(x)^2\, dx$ est positif;

b) le nombre réel $\int_a^b f(x)^2\, dx$ est nul si et seulement si la fonction f est nulle.

Cette application possède donc les mêmes propriétés fondamentales que le produit scalaire bien connu, que nous avons vu au tome 1. Nous sommes donc amenés à dire que l'application définie par la formule (3) est un *produit scalaire* sur E et que, muni de ce produit scalaire, l'espace vectoriel E est euclidien.

Il nous sera très commode de conserver le langage évocateur de la géométrie à propos des fonctions. Ainsi, on dit que des fonctions f et g sont *orthogonales* si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$.

Par exemple, si $a = -1$ et $b = 1$, les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$ sont orthogonales. En effet,

$$\int_{-1}^{1} x^2 x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}[x^4]_{-1}^{1} = 0\,.$$

Examinons maintenant le cas où a est un nombre réel quelconque et où $b = a + 2\pi$. Pour tout entier naturel n, posons

$$f_n(x) = \sin nx \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \cos nx\,.$$

Alors les fonctions f_n sont orthogonales deux à deux, c'est-à-dire que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels *distincts*,

$$\int_a^b f_p(x) f_q(x) \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

En effet,

$$\sin px \sin qx = \tfrac{1}{2}[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]\,.$$

Puisque $p-q$ et $p+q$ sont non nuls, l'intégrale du second membre sur $[a, b]$ est nulle (voir tome 2).

De même, les fonctions g_n sont orthogonales deux à deux. De plus, pour tout entier naturel p et pour tout entier naturel q, les fonctions f_p et g_q sont orthogonales (cette fois, p pouvant être égal à q).

Enfin,

$$\int_a^b g_0(x)^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi$$

et, pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_a^b f_n(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b g_n(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

9.3 Séries de Fourier. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, intégrable sur tout intervalle de longueur 2π. Nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité d'une série trigonométrique convergeant en tout point x de $\mathbf{R}$ et telle que

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\,. \tag{1}$$

Supposons d'abord qu'il existe une telle série trigonométrique. Nous allons montrer que l'on peut déterminer les coefficients A_n et B_n d'une manière et d'une seule. Nous aurons ainsi prouvé l'*unicité* de la série trigonométrique cherchée. Cette méthode nous fournira en même temps *des formules constamment utilisées en pratique pour le calcul effectif des coefficients.*

Calcul de A_0. Intégrons les deux membres de la relation (1) entre a et $a+2\pi$:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} A_0 \,\mathrm{d}x + \int_a^{a+2\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right] \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Admettons que l'on puisse intervertir les symboles $\int$ et $\sum$:

$$\int_a^{a+2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{a+2\pi} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\,\mathrm{d}x. \quad (3)$$

Puisque, pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_a^{a+2\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

le second membre se réduit a $\int_a^{a+2\pi} A_0\,\mathrm{d}x = 2\pi A_0$. Donc

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.} \quad (4)$$

Cette intégrale n'est autre que la valeur moyenne de f sur l'intervalle considéré (voir tome 2).

Calcul de A_n. Multiplions les deux membres de (1) par $\cos px$ et intégrons de a à $a+2\pi$:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos px\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right] \cos px\,\mathrm{d}x.$$

Intervertissons encore les symboles $\int$ et $\sum$. L'orthogonalité des fonctions $\sin nx$ et $\cos px$ pour tout entier naturel n, ainsi que celle des fonctions $\cos nx$ et $\cos px$ pour tout entier naturel n autre que p, montre que le second membre se réduit au terme en $\cos^2 px$, soit

$$\int_a^{a+2\pi} A_p \cos^2 px\,\mathrm{d}x = \pi A_p.$$

Aux notations près, pour tout entier naturel non nul n,

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x.} \quad (5)$$

Calcul de B_n. Multiplions enfin les deux membres de (1) par $\sin px$. Un calcul en tous points analogue au précédent montre que le second membre se réduit à

$$\int_a^{a+2\pi} B_p \sin^2 px\,\mathrm{d}x = \pi B_p.$$

Aux notations près, pour tout entier naturel non nul n,

$$\boxed{B_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x.} \quad (6)$$

Les coefficients A_0, A_n et B_n ainsi obtenus sont appelés *coefficients de Fourier* de la fonction périodique f. La série trigonométrique obtenue à partir de ces coefficients est connue sous le nom de *série de Fourier* de la fonction f. Comme dans le cas des séries entières (voir chap. 8), deux questions se posent :

a) la série de Fourier de f est-elle convergente?
b) si oui, sa somme est-elle égale à f?

9.4 Théorème de Lejeune-Dirichlet. Voici sans démonstration un théorème assurant l'*existence* d'un développement en série de Fourier :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, admettant 2π pour période, continûment dérivable sur le complémentaire d'une partie finie Q de $[a, a+2\pi]$. On suppose que f et f' admettent des limites à gauche et des limites à droite en tout point de Q. Alors la série de Fourier de f converge en tout point x de $\mathbf{R}$; sa somme est égale à

$$S(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

c'est-à-dire à la somme des limites à gauche et à droite de f au point x. En particulier, en tout point x où f est continue,

$$S(x) = f(x).$$

(En effet, dans ce cas les trois nombres $f(x)$, $f(x+)$ et $f(x-)$ sont égaux.)

En outre, si f est continue sur $[a, a+2\pi]$, la série de Fourier de f converge absolument et uniformément vers f.

La plupart des fonctions rencontrées dans les problèmes courants de la physique vérifient les conditions de ce théorème. Nous n'aurons pas de difficultés soulevées par des questions de convergence.

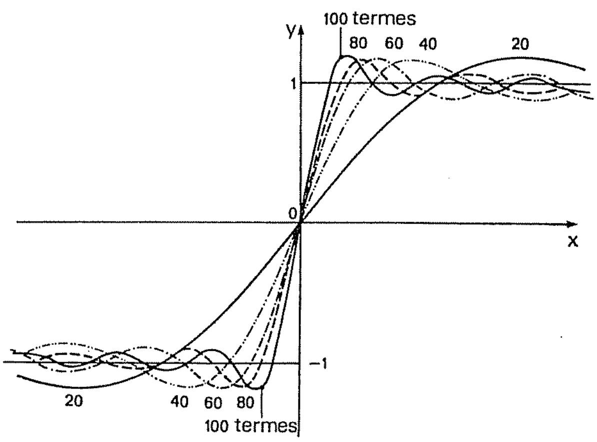


FIG. 9.1

Phénomène de Gibbs. Nous venons de voir que si f n'est pas continue en un point x, la somme de sa série de Fourier n'est pas égale à $f(x)$. Représentons f

par la somme partielle à l'ordre n de sa série de Fourier :

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{n} (A_p \cos px + B_p \sin px).$$

L'erreur commise est considérable, et *elle ne s'atténue pas lorsque n augmente indéfiniment*. Cest le phénomène de Gibbs.

Sur la figure 9.1 on voit que $S_n(x)$ dépasse la valeur 1 prise par f d'environ 18% lorsque x est positif et voisin de 0. Si n augmente, ce dépassement ne disparaît pas, mais l'abscisse du maximum se rapproche de 0.

Ce phénomène ne se présente pas lorsque f est continûment dérivable.

9.5 Cas d'une période quelconque. Nous avons examiné jusqu'ici le cas de fonctions admettant 2π pour période. En physique, on rencontre des fonctions admettant une période T : pour tout nombre réel t,

$$f(t+T) = f(t).$$

La variable t représente souvent le temps.

On se ramène au cas de la période 2π grâce au changement de variable

$$t/T = x/2\pi .$$

Le nombre $\omega = 2\pi/T$ s'appelle *fréquence fondamentale*, ou pulsation angulaire de récurrence. Les multiples $n\omega$ de la fréquence fondamentale, où $n \geqslant 2$, sont appelés *harmoniques*.

En acoustique, la fréquence fondamentale représente la hauteur des sons; le mélange des harmoniques caractérise leur timbre.

On sait qu'on a pu faire l'analyse des sons, et leur synthèse, en vue de reconstituer les différents timbres, ce qui est réalisé dans les orgues électroniques. Ceci est une preuve *a posteriori* que la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier et que l'existence des harmoniques ne sont pas une fiction mathématique.

Contrairement à ce que l'on dit dans le langage courant, le *premier* harmonique a une fréquence *double* du fondamental, le deuxième a une fréquence triple, etc. Mais, cependant, lorsque l'on parle de « *l'harmonique deux* » tout le monde comprend qu'il s'agit de celui qui a une fréquence double de la fréquence fondamentale, l'harmonique trois ayant une fréquence triple, etc., l'essentiel est de bien se comprendre.

La série de Fourier d'une fonction f admettant T pour période est définie par la formule

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \qquad \text{avec } \omega = 2\pi/T.$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par les formules

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t \tag{4'}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t\, \mathrm{d}t \qquad n \in \mathbf{N}^* \tag{5'}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt \qquad n \in \mathbf{N}^*. \tag{6'}$$

Bien entendu, lorsque $T = 2\pi$, on retrouve les formules (4), (5) et (6).

9.6 Calcul pratique des coefficients de Fourier. Le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique f est généralement long et fastidieux. Il est donc conseillé d'utiliser chaque fois que cela est possible les remarques suivantes :

a) *Cas où la fonction f est paire.* Autrement dit, pour tout nombre réel x,

$$f(-x) = f(x).$$

Prenons $a = -\pi$. La fonction $x \mapsto f(x) \sin nx$, étant impaire, admet une primitive paire, dont la variation entre $-\pi$ et π est nulle. La formule (6) montre que les coefficients B_n sont nuls. Ainsi,

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos nx. \tag{7}$$

La série de Fourier d'une fonction paire ne comporte pas de terme en sinus (Fig. 9.2). On dit que l'on a développé f en série de cosinus. (Réciproquement, on remarquera que la somme d'une série de cosinus est une fonction paire.)

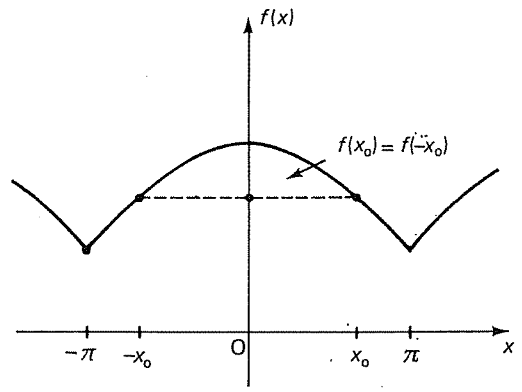


FIG. 9.2

De plus, vu la parité de f et de $x \mapsto f(x) \cos nx$, les formules (4) et (5) peuvent encore s'écrire :

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx \tag{8}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad n \in \mathbf{N}^*. \tag{9}$$

b) *Cas où la fonction f est impaire.* Autrement dit, pour tout nombre réel x,

$$f(-x) = -f(x).$$

Prenons encore $a = -\pi$. La fonction $x \mapsto f(x)\cos nx$, étant impaire, a une intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$. Les formules (4) et (5) montrent que, pour tout entier naturel n, le coefficient A_n est nul. Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin nx. \tag{10}$$

La série de Fourier d'une fonction impaire ne comporte pas de terme en cosinus (Fig. 9.3). On dit que l'on a développé f en série de sinus. (Réciproquement, on remarquera que la somme d'une série de sinus est une fonction impaire.)

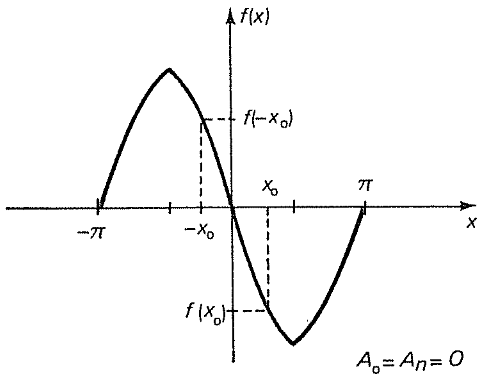


FIG. 9.3

De plus, vu la parité de la fonction $x \mapsto f(x)\sin nx$, la formule (6) peut encore s'écrire :

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

c) *Cas où la fonction f admet π pour période.* Autrement dit, pour tout nombre réel x,

$$f(x+\pi) = f(x).$$

D'après la relation de Chasles,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right].$$

Posons $x = u+\pi$ dans la dernière intégrale. Nous obtenons

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(u+\pi)\cos n(u+\pi)\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $f(u+\pi)=f(u)$ et que $\cos(nu+n\pi)=(-1)^n \cos nu$,

$$\int_0^\pi f(u+\pi)\cos n(u+\pi)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi f(u)(-1)^n \cos nu\,du = (-1)^n \int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x .$$

Finalement,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[1+(-1)^n\right]\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x .$$

Ainsi, pour tout entier naturel p,

$$A_{2p} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2px\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad A_{2p+1}=0, \tag{12}$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de terme de rang impair dans la série des cosinus.

Effectuons maintenant les mêmes calculs sur les coefficients B_n :

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right].$$

Posons $x=u+\pi$:

$$\int_\pi^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(u+\pi)\sin n(u+\pi)\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^\pi f(u)\sin nu\,du.$$

Nous obtenons finalement :

$$B_n = \frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x .$$

Ainsi, pour tout entier naturel p,

$$B_{2p} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2px\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B_{2p+1}=0 \tag{13}$$

Nous retiendrons donc la règle suivante :

Lorsque f admet π pour période, la série de Fourier de f ne comporte que des harmoniques de rang pair (Fig. 9.4) :

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(A_{2p}\cos 2px + B_{2p}\sin 2px) \tag{14}$$

d) *Cas où, pour tout nombre réel x,*

$$f(x+\pi) = -f(x) . \tag{15}$$

Le calcul des coefficients de Fourier montre cette fois que, pour tout entier

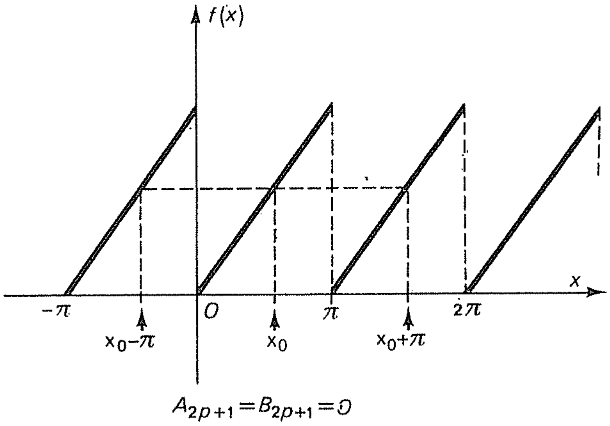


FIG. 9.4

naturel p,

$$A_{2p} = B_{2p} = 0 \tag{16}$$

$$A_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2p+1)\,x\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

$$B_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2p+1)\,x\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

D'où la règle suivante :

Lorsque, pour tout nombre réel x, $f(x+\pi) = -f(x)$, la série de Fourier de f ne comporte que des harmoniques de rang impair :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} [A_{2p+1}\cos(2p+1)x + B_{2p+1}\sin(2p+1)x] \tag{19}$$

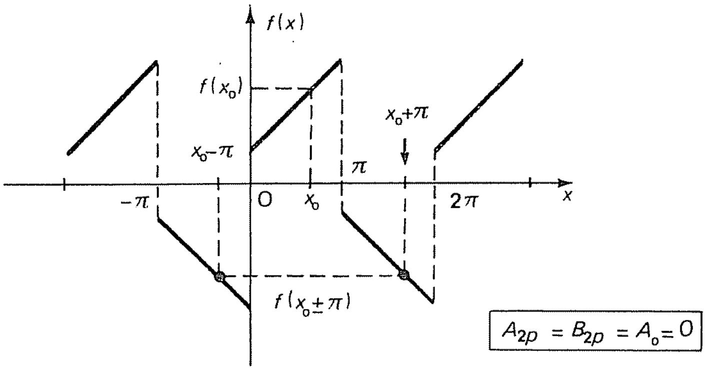


FIG. 9.5

On remarquera que toute fonction f vérifiant la condition (15) admet 2π pour période. En effet,

$$f(x+2\pi) = -f(x+\pi) = f(x) .$$

Nous allons appliquer la théorie précédente à quelques exemples classiques.

9.7 Fonction en dents de scie triangulaires. Soit f la fonction de période 2π définie par

$$f(x) = |x| \qquad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi] .$$

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, et dérivable si $x \neq k\pi$. De plus, sa dérivée est égale à -1 sur $]-\pi, 0[$ et à 1 sur $]0, \pi[$; elle satisfait évidemment aux hypothèses du théorème de Lejeune-Dirichlet, puisqu'elle admet des limites à droite et à gauche aux points $-\pi$, 0 et π (Fig. 9.6).

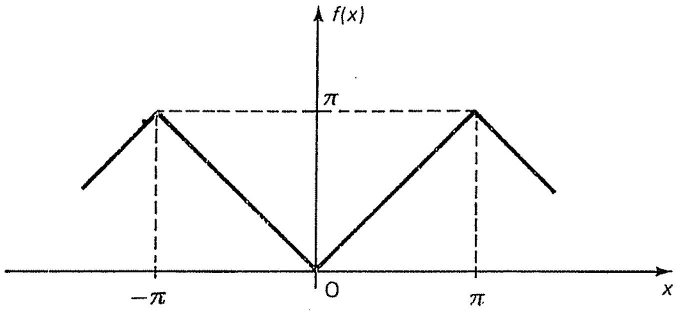


FIG. 9.6

En outre, f est paire. Sa série de Fourier ne comporte donc que des cosinus. Enfin, pour tout nombre réel x,

$$f(x+\pi)-\pi/2 = -f(x)+\pi/2 .$$

Autrement dit, $f-\pi/2$ satisfait à la condition (15), ce qui montre que seuls les termes de rang impair subsistent. Il suffit donc de calculer A_0 et A_{2p+1} à l'aide des formules (8) et (9) :

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \, \mathrm{d}x = \pi/2$$

$$A_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos(2p+1)x \, \mathrm{d}x .$$

Intégrons par parties :

$$\int x \cos(2p+1)x \, dx = \frac{x}{2p+1} \sin(2p+1)x - \frac{1}{2p+1} \int \sin(2p+1)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2p+1} x \sin(2p+1)x + \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)x .$$

D'où

$$A_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)^2 \pi}.$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)x .$$

Calculons des valeurs approchées des premiers coefficients non nuls :

$A_0 = \pi/2 \approx 1{,}57$ valeur moyenne de f;
$A_1 = -4/\pi \approx -1{,}27$ amplitude de la fondamentale;
$A_3 = -4/9\pi \approx -0{,}141$ amplitude de l'harmonique trois;
$A_5 = -4/25\pi \approx -0{,}051$ amplitude de l'harmonique cinq.

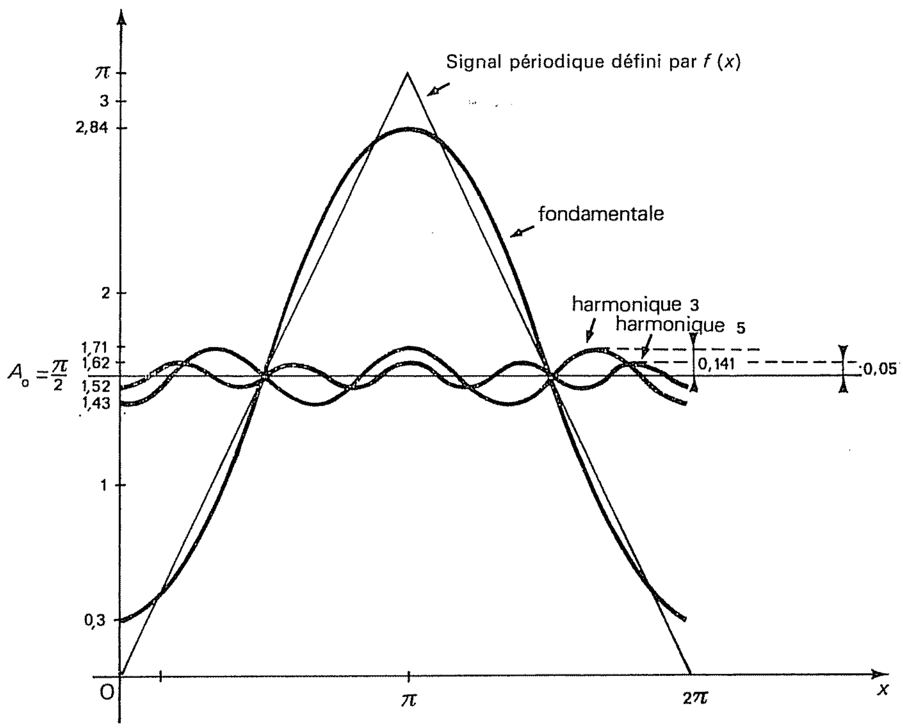


FIG. 9.7

La figure 9.7 représente les graphes de la fondamentale et des harmoniques trois et cinq.

9.8 Fonction en dents de scie. Soit f la fonction de période T définie par les formules

$$f(t) = \frac{2E}{T} t \quad \text{si} \quad t \in]-T/2, T/2[\qquad f(T/2) = 0 .$$

Cette fonction est impaire (Fig. 9.8).

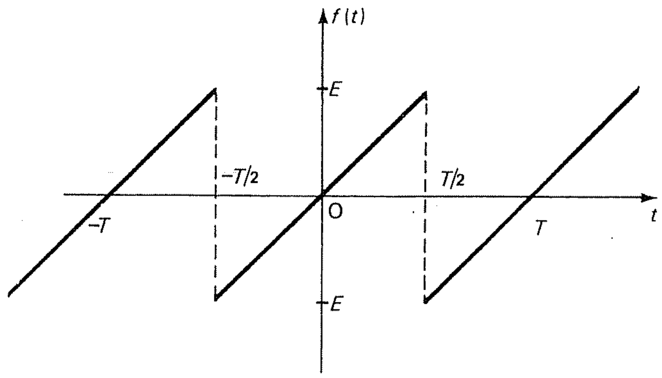


FIG. 9.8

(Remarquons que

$$f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{T}{2}+\right) + f\left(\frac{T}{2}-\right)}{2}.$$

La série de Fourier converge donc vers $f(t)$ pour tout nombre réel t, quoique f ne soit pas continue sur $\mathbf{R}$.)

La formule (5′) s'écrit ici

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} t \sin n\omega t \, dt .$$

Une intégration par parties montre que

$$B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} E .$$

Ainsi,

$$f(t) = -\frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n\omega t}{n} .$$

De manière plus explicite :

$$f(t) = \frac{2E}{\pi}\left[\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin 2\,\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\,\omega t + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\sin n\omega t}{n} + \cdots\right].$$

9.9 Signal rectangulaire. Soit f la fonction impaire de période T définie par les formules

$$f(t) = \frac{2(b-a)}{T}\,t - b \quad \text{si} \quad t \in]0, T/2[\qquad f(0) = 0$$

(Fig. 9.9). Dans le cas particulier où $a = b = E$, on obtient un signal rectangulaire (Fig. 9.10).

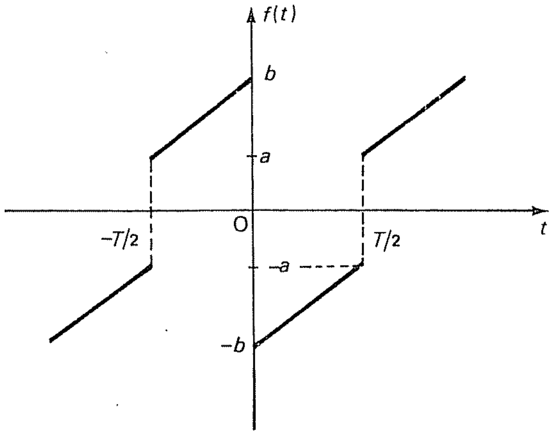


FIG. 9.9

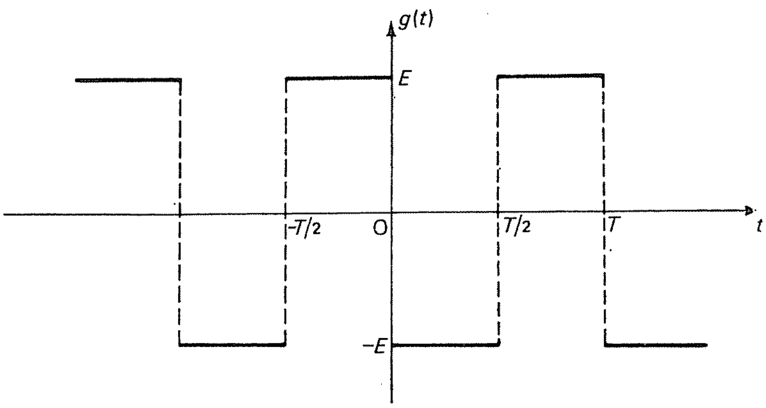


FIG. 9.10

Puisque f est impaire, les coefficients A_0 et A_n sont nuls. Le coefficient B_n est donné par la formule (6′), qui s'écrit ici

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2(b-a)}{T} t - b \right) \sin n\omega t \,\mathrm{d}t .$$

Une intégration par parties conduit aisément à

$$B_n = \frac{2}{n\pi} [(-1)^n a - b] .$$

Ainsi,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2[(-1)^n a - b]}{n\pi} \sin n\omega t , \tag{20}$$

formule valable même lorsque $t = kT/2$, puisque la valeur de f est la demi-somme des limites à gauche et à droite en chaque point de discontinuité.

Dans le cas du signal rectangulaire, cette formule se simplifie considérablement. En effet, la fonction f satisfait alors à la condition

$$f(t+T/2) = -f(t) .$$

Les harmoniques de rang pair disparaissent, ce que l'on retrouve sur la formule (20). Il reste

$$f(t) = -\frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1} .$$

9.10 Courant redressé à une alternance. Soit f la fonction de période 2π définie par les formules

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \qquad \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ &= 0 \qquad\quad\ \text{si} \quad x \in]\pi, 2\pi[. \end{aligned}$$

Cette fonction représente en électricité la forme d'un courant ou d'une tension sinusoïdal redressé à une alternance d'amplitude unité (Fig. 9.11).

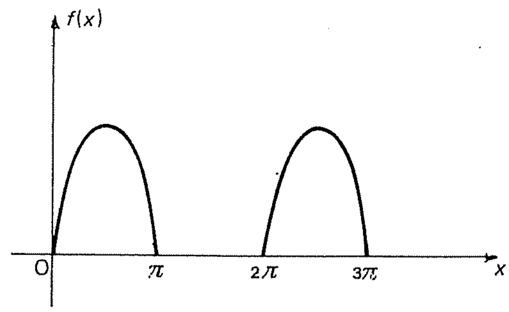


FIG. 9.11

Calculons les coefficients de Fourier, compte tenu du fait que f est nulle sur l'intervalle $]\pi, 2\pi[$. Il vient

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = 1/\pi$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi \sin(n+1)x \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \sin(n-1)x\,\mathrm{d}x\right].$$

Les sinus admettent pour primitives des cosinus (sauf si $n = 1$, auquel cas la deuxième intégrale est évidemment nulle). On trouve aisément que

$$A_{2p} = -\frac{2}{(4p^2-1)\pi}, \qquad A_{2p+1} = 0.$$

De même :

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi \cos(n-1)x \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \cos(n+1)x\,\mathrm{d}x\right].$$

Les cosinus admettent pour primitives des sinus (sauf si $n = 1$, auquel cas la première intégrale est évidemment égale à π). On trouve aisément que

$$B_1 = 1/2 \qquad B_n = 0 \quad \text{si } n \neq 1\,.$$

En résumé :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)}\cos 2px\,.$$

9.11 Quelques conséquences électriques. Supposons une différence de potentiel alternative non sinusoïdale

$$v = V_0 + V_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + V_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + V_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots$$

appliquée aux bornes d'un circuit comprenant en série une résistance pure R, un condensateur de capacité C et une bobine dont le coefficient de self-induction (ou inductance) est L.

Le courant est donc lui-même composé d'harmoniques : chaque harmonique de tension donnant naissance à un harmonique de courant, mais présentant un certain déphasage α_n; ainsi

$$i = I_0 + I_1 \sin(\omega t - \varphi_1 - \alpha_1) + I_2 \sin(2\omega t - \varphi_2 - \alpha_2)$$
$$+ I_3 \sin(3\omega t - \varphi_3 - \alpha_3) + \dots$$

avec

$$I_0 = 0\,,$$

(à cause de C en série qui empêche le passage d'un courant continu en régime établi)

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{\sqrt{R^2+(2L\omega-1/2\,C\omega)^2}}$$

$$I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2+(nL\omega-1/nC\omega)^2}}.$$

On en déduit alors les conclusions suivantes, *très importantes :*

1° si le circuit ne comprend que des résistances, la forme de la courbe du courant est la même que celle de la tension v;

2° la réactance d'inductance étant $nL\omega$, il en résulte que, si le circuit ne comprend pas de condensateurs, les harmoniques sont de plus en plus *étouffés*, et la courbe du courant se rapproche davantage d'une sinusoïde que celle de la tension v;

3° la réactance de capacité étant $1/nC\omega$, il en résulte que, si le circuit ne comprend pas de bobine d'inductance, les harmoniques élevés sont *renforcés* et la courbe du courant diffère beaucoup d'une sinusoïde;

4° le décalage du courant sur la tension est donné par

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{nL\omega-1/nC\omega}{R}$$

où n est le rang de l'harmonique. Donc, si n tend vers l'infini, $\operatorname{tg}\alpha_n \to +\infty$, et α_n tend vers $\pi/2$, et les harmoniques élevés tendent à être en quadrature avec la tension. Il en résulte que la puissance électrique est formée surtout par le terme fondamental, et un peu par les premiers harmoniques;

5° enfin, si

$$nL\omega = 1/nC\omega$$

il y a *résonance* sur l'harmonique de rang n, et il y aura surtension, c'est-à-dire que les différences de potentiel aux bornes de L *et* aux bornes de C seront renforcées. C'est sur ce principe que sont fondés les *analyseurs* électriques du commerce, qui permettent de trouver le rang et l'intensité des différents harmoniques d'une fonction non sinusoïdale : en faisant varier C (en le diminuant peu à peu), on se met en résonance successivement sur les différents harmoniques.

9.12 Forme complexe des séries de Fourier. Nous avons vu au n° 9.1 que la somme d'une série trigonométrique peut s'exprimer sous la forme complexe suivante :

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n e^{jnx} + C_{-n} e^{-jnx}).$$

De même, la série de Fourier d'une fonction f satisfaisant aux conditions du théorème de Lejeune-Dirichlet peut se mettre sous la forme complexe en tout point x où elle converge. Dans ces conditions, nous pouvons écrire

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n e^{jnx} + C_{-n} e^{-jnx}),$$

où

$$C_n = \tfrac{1}{2}(A_n - jB_n) \qquad \text{et} \qquad C_{-n} = \tfrac{1}{2}(A_n + jB_n).$$

Nous allons montrer que les coefficients C_n et C_{-n} s'expriment simplement en fonction de f sous la forme d'intégrales, voire plus simplement que les coefficients A_n et B_n. Appliquons en effet les formules d'Euler :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)(e^{jnx} + e^{-jnx}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{jnx} \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx.$$

De même :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{2j\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)(e^{jnx} - e^{-jnx}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2j\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{jnx} \, dx - \frac{1}{2j\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx.$$

Il en découle aussitôt que

$$C_{-n} = \tfrac{1}{2}(A_n + jB_n) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{jnx} \, dx \tag{21}$$

$$C_n = \tfrac{1}{2}(A_n - jB_n) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx. \tag{22}$$

On remarquera que $C_{-n} = \bar{C}_n$. Les coefficients de Fourier sous forme complexe sont donc deux à deux conjugués. De plus, on passe de la formule (21) à la formule (22) en changeant n en $-n$. Enfin, lorsqu'on remplace n par 0 dans l'une ou l'autre de ces formules, on trouve

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \, dx = A_0.$$

Ainsi, la formule (21) est valable non seulement pour tout entier naturel non nul n, mais aussi pour tout entier rationnel n. Il n'y a donc qu'une seule formule à retenir, au lieu des trois formules (4), (5) et (6). (Cependant, la forme réelle est la plus simple dans le cas des fonctions paires ou impaires, la moitié des coefficients étant nuls.)

En résumé,

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}nx}} \tag{23}$$

où, pour tout entier rationnel n,

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x\,.} \tag{24}$$

Le cas d'une fonction de période T se ramène au précédent, grâce encore au changement de variable

$$t/T = x/2\pi\,.$$

Ainsi,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{25}$$

où, pour tout entier rationnel n,

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{26}$$

Recherche des coefficients de Fourier réels. Dans le cas où il est nécessaire de retrouver les coefficients A_0, A_n et B_n à partir des coefficients C_n, il suffit de remarquer que

$$A_0 = C_0$$

$$A_n = 2\,\mathrm{Re}(C_n)\,, \qquad B_n = -2\,\mathrm{Im}(C_n)\,.$$

9.13 Développement complexe de la fonction en dents de scie. Reprenons l'exemple du n° 9.8. La formule (26) devient

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \frac{2E}{T}\,t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2E}{T^2}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Il est immédiat que $C_0 = 0$. Lorsque n est non nul,

$$C_n = \frac{2E}{T^2}\left[\frac{-t}{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t} + \frac{1}{n^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right]_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}$$

$$= \frac{2E}{T^2}\left(\frac{-T}{2\mathrm{j}\,n\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2} + \frac{1}{n^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2} - \frac{T}{2\mathrm{j}\,n\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2} - \frac{1}{n^2\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2}\right).$$

Or, $\mathrm{j}n\omega\dfrac{T}{2} = \mathrm{j}n\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{2} = \mathrm{j}n\pi$; donc $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}/2} = (-1)^n$. Par suite,

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}E}{\mathrm{j}n\pi}\,.$$

Comme $C_n = \frac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}B_n)$, on retrouve ainsi

$$A_n = 0 \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2(-1)^{n+1}E}{n\pi}.$$

9.14 Signal exponentiel. On considère un signal de période $T = 2\theta$ défini par

$$\begin{aligned} f(t) &= E(1 - \mathrm{e}^{-t/\theta}) \quad &\text{si} \quad & t \in [0, \theta] \\ &= 0 \quad &\text{si} \quad & t \in]\theta, 2\theta[\end{aligned}$$

(Fig. 9.12). Il n'y a aucune simplification par symétrie ou par parité, et donc aucune raison de chercher un développement en série de cosinus ou de sinus. Cherchons les coefficients de Fourier sous la forme complexe :

$$C_0 = \frac{E}{T} \int_0^\theta (1 - \mathrm{e}^{-t/\theta})\,\mathrm{d}t = \frac{E}{2\mathrm{e}}$$

et, si $n \neq 0$,

$$C_n = \frac{E}{T} \int_0^\theta (1 - \mathrm{e}^{-t/\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{E}{T}\left[\frac{-1}{\mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t} + \frac{1}{1/\theta + \mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}n\omega + 1/\theta)t}\right]_0^\theta.$$

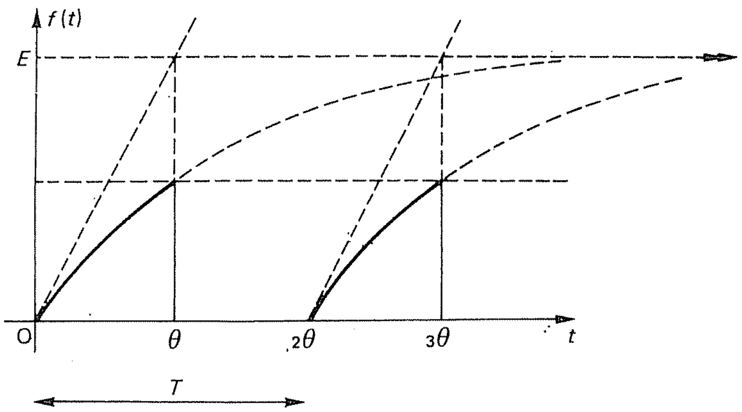


FIG. 9.12

Comme $\mathrm{j}n\omega\theta = \mathrm{j}n\,\dfrac{2\pi}{T}\,\theta = \mathrm{j}n\pi$, nous voyons que $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\theta} = \cos n\pi = (-1)^n$. Il vient aisément

$$C_n = \frac{E}{2}\left[\frac{1 - (-1)^n}{\mathrm{j}n\pi} + \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-1} - 1}{1 + \mathrm{j}n\pi}\right],$$

soit encore

$$C_n = \frac{E}{2}\left[\frac{(-1)^n e^{-1}-1}{1+n^2\pi^2} - j\left(n\pi\frac{(-1)^n e^{-1}-1}{1+n^2\pi^2} + \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\right],$$

ce qui montre que les coefficients de Fourier ne sont pas toujours donnés par des expressions très simples.

On en déduit aussitôt $A_0 = C_0$ et, pour tout entier naturel non nul n,

$$A_n = \frac{(-1)^n e^{-1}-1}{1+n^2\pi^2}\,.\,E \quad \text{et} \quad B_n = E\left[\frac{n\pi(e^{-1}(-1)^n-1)}{1+n^2\pi^2} + \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right].$$

9.15 Courant redressé à deux alternances. Pour terminer, nous allons traiter le problème suivant :

On considère le circuit électrique de la figure 9.13, *attaqué à l'entrée par un signal sinusoïdal* $u = E \sin \omega t$.

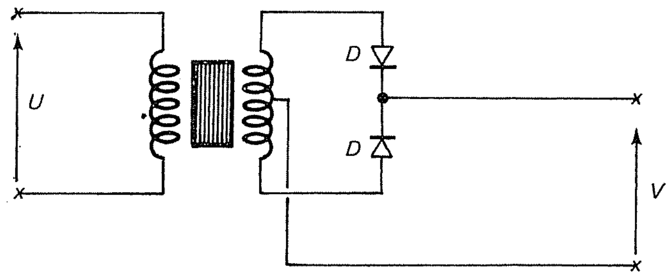


FIG. 9.13

On admet que le transformateur est de rapport 1 *et que les diodes D sont parfaites.*

a) *Donner l'expression du signal de sortie v en fonction du temps, et construire le graphe de cette fonction.*

b) *Déterminer la forme complexe du développement en série de Fourier de v.*

c) *En déduire la forme réelle de ce développement.*

a) Le circuit proposé est appelé redresseur à double alternance. Il est fondé sur la conduction unilatérale des diodes D. Le signal de sortie est

$$v = E\,|\sin \omega t|\,, \qquad \text{où} \quad \omega = 2\pi/T\,.$$

La variation de v en fonction du temps est représentée par la figure 9.14.

b) Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et continûment dérivable sur les intervalles $]-T/2, 0[$ et $]0, T/2[$. De plus, dv/dt admet une limite à gauche et une limite à droite aux points $kT/2$. Le théorème de Lejeune-Dirichlet s'applique, et montre

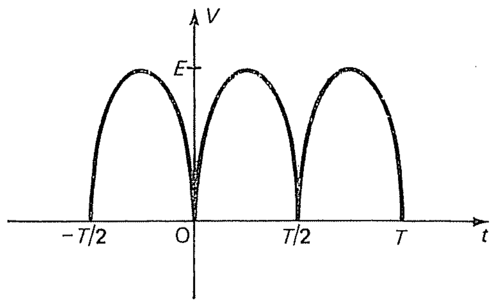


FIG. 9.14

que v est la somme de sa série de Fourier. Or,

$$C_n = \frac{E}{T}\int_{-T/2}^{0} \sin\omega t\, e^{-jn\omega t}\,dt + \frac{E}{T}\int_{0}^{T/2} \sin\omega t\, e^{-jn\omega t}\,dt$$

$$= \frac{E}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\, e^{-jn\omega t}\,dt + \frac{E}{T}\int_{0}^{T/2} \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\, e^{-jn\omega t}\,dt.$$

$$= \frac{jE}{2T}\left[\int_{-T/2}^{0}\left(e^{j\omega(1-n)t}-e^{-j\omega(1+n)t}\right)dt - \int_{0}^{T/2}\left(e^{j\omega(1-n)t}-e^{-j\omega(1+n)t}\right)dt\right].$$

Lorsque n est différent de 1 et de -1, les exponentielles admettent pour primitives des exponentielles :

$$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\,e^{at}.$$

On trouve aisément que

$$C_{2p} = -\frac{2E}{\pi}\,\frac{1}{4p^2-1}, \qquad C_{2p+1} = 0.$$

D'autre part, un calcul direct montre que

$$C_1 = C_{-1} = 0.$$

Ainsi,

$$v = \frac{2E}{\pi}\left(1 - \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{e^{2jp\omega t}}{4p^2-1} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{2jp\omega t}}{4p^2-1}\right).$$

c) Pour retrouver la forme trigonométrique de cette série, il suffit de regrouper les exponentielles conjuguées :

$$v = \frac{2E}{\pi}\left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{2jp\omega t}+e^{-2jp\omega t}}{4p^2-1}\right) = \frac{2E}{\pi}\left(1-2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos 2p\omega t}{4p^2-1}\right),$$

soit encore

$$v = \frac{2E}{\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \cdots - \frac{2}{4p^2-1}\cos 2p\omega t - \cdots\right).$$

Nous constatons que la série ne comporte que des termes en cosinus, ce qui était prévisible puisque la fonction v est paire; d'autre part, il n'existe que des harmoniques de rang pair, ce qui était également prévisible puisque v admet $T/2$ pour période.

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES DE FOURIER

Pour toute fonction périodique f intégrable sur $[a, a+2\pi]$, nous noterons $A_n(f)$, $B_n(f)$ et $C_n(f)$ les coefficients de Fourier de f.

9.16 Coefficients de Fourier d'une dérivée. Soit f une fonction continûment dérivable et admettant 2π pour période. Nous allons calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f :

$$A_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}[f(a+2\pi)-f(a)] = 0$$

$$A_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Intégrons par parties, en posant $u = \cos nx$ et $\mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x$; nous obtenons

$$A_n(f') = \frac{1}{\pi}[f(x)\cos nx]_a^{a+2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Puisque f est périodique, il en est de même de $x \mapsto f(x)\cos nx$. La variation de la quantité entre crochets est donc nulle. Ainsi,

$$A_n(f') = nB_n(f).$$

De même,

$$B_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[f(x)\sin nx]_a^{a+2\pi} - \frac{n}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -nA_n(f).$$

Les coefficients sous la forme complexe s'obtiennent encore à l'aide d'une intégration par parties :

$$C_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}[f(x)\,e^{-\mathrm{j}nx}]_a^{a+2\pi} + \mathrm{j}\frac{n}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$C_n(f') = \mathrm{j}nC_n(f).$$

En résumé,

$$\begin{aligned} &A_0(f') = 0\,, \\ &A_n(f') = nB_n(f)\,, \\ &B_n(f') = -nA_n(f)\,, \\ &C_n(f') = \mathrm{j}nC_n(f) = \overline{C_{-n}(f')}\,. \end{aligned}$$

Dans le cas où la période n'est pas nécessairement 2π, le changement de variable $t/T = x/2\pi$, soit $x = \omega t$, conduit à

$$\begin{aligned} &A_0(f') = 0\,, \\ &A_n(f') = n\omega B_n(f)\,, \\ &B_n(f') = -n\omega A_n(f)\,, \\ &C_n(f') = \mathrm{j}n\omega C_n(f)\,. \end{aligned}$$

Si f' satisfait aux conditions du théorème de Lejeune-Dirichlet,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n\omega B_n(f) \cos n\omega t - n\omega A_n(f) \sin n\omega t)\,.$$

Or,

$$f(t) = A_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n(f) \cos n\omega t + B_n(f) \sin n\omega t)\,.$$

On peut donc dans ce cas dériver terme à terme le développement en série de Fourier de f pour obtenir celui de f'.

9.17 Coefficients de Fourier d'une primitive. Soit f une fonction continue admettant 2π pour période. Il n'y a aucune raison pour que les primitives de f admettent 2π pour période.

Pour qu'il existe une primitive F de f admettant 2π pour période, il faut et il suffit que la valeur moyenne de f sur une période soit nulle ou, ce qui revient au même :

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(Dans ces conditions, toutes les primitives de f admettent 2π pour période.)

Le calcul des coefficients de Fourier de F se déduit de l'étude précédente : il suffit de remplacer f et f' par F et f, puisque $F' = f$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} &A_0(F) = 0, \\ &A_n(F) = -\frac{1}{n} B_n(f), \\ &B_n(F) = \frac{1}{n} A_n(f), \\ &C_n(F) = \frac{1}{\mathrm{j}n} C_n(f)\,. \end{aligned}$$

9.18 Coefficients de Fourier d'une translatée. Soient f une fonction de période 2π intégrable sur tout intervalle $[a, a+2\pi]$ et τ un nombre réel. On appelle *translatée* de f par τ la fonction f_τ définie par la formule

$$f_\tau(x) = f(x-\tau)\,.$$

(Fig. 9.15).

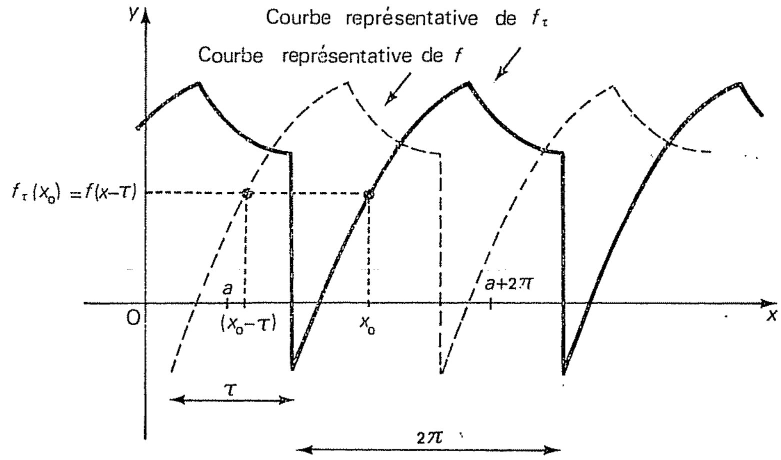


FIG. 9.15

Il est immédiat que f_τ est encore de période 2π et intégrable sur $[a, a+2\pi]$. Calculons les coefficients de Fourier de f:

$$A_n(f_\tau) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f_\tau(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x-\tau)\cos nx\,\mathrm{d}x\,.$$

Effectuons le changement de variable $u = x-\tau$; alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Il n'est pas nécessaire de changer les bornes, puisque l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas de l'intervalle considéré. Donc

$$A_n(f_\tau) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(u)\cos n(u+\tau)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cos n\tau\int_a^{a+2\pi} f(u)\cos nu\,\mathrm{d}u - \sin n\tau\int_a^{a+2\pi} f(u)\sin nu\,\mathrm{d}u\right].$$

Nous voyons ainsi apparaître les coefficients de Fourier de f. En procédant de la même manière pour $B_n(f_\tau)$ et $C_n(f_\tau)$, on obtient les formules suivantes :

$$A_n(f_\tau) = A_n(f)\cos n\tau - B_n(f)\sin n\tau\,,$$
$$B_n(f_\tau) = A_n(f)\sin n\tau + B_n(f)\cos n\tau\,,$$
$$C_n(f_\tau) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\tau}\,C_n(f)\,.$$

Lorsque la période T n'est pas nécessairement égale à 2π, ces formules deviennent :

$$A_n(f_\tau) = \cos n\omega\tau \; A_n(f) - \sin n\omega\tau \; B_n(f)\,,$$
$$B_n(f_\tau) = \cos n\omega\tau \; B_n(f) + \sin n\omega\tau \; A_n(f)\,,$$
$$C_n(f_\tau) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau} \, C_n(f)\,.$$

EXEMPLE. Appliquons ces résultats à la fonction g définie par

$$g(x) = \cos x \qquad \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$= 0 \qquad \text{si } x \in \,]\pi/2, 3\pi/2[$$

(Fig. 9.16).

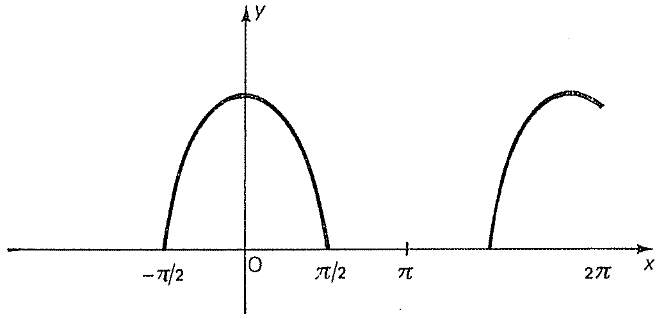


FIG. 9.16

La fonction g est la translatée $f_{-\pi/2}$ du signal redressé à une alternance (nº 9.10), défini par

$$f(x) = \sin x \qquad \text{si } x \in [0, \pi]$$
$$= 0 \qquad \text{si } x \in \,]\pi, 2\pi[\,.$$

Or,

$$A_0(f) = 1/\pi$$

$$A_{2p}(f) = -\frac{2}{(4p^2-1)\pi} \qquad A_{2p+1}(f) = 0$$

$$B_1(f) = 1/2 \qquad B_n(f) = 0 \quad \text{si } n \neq 1\,.$$

Donc

$$A_n(g) = A_n(f) \cos n\pi/2 + B_n(f) \sin n\pi/2\,,$$

soit

$$A_0(g) = A_0(f) = 1/\pi\,,$$

$$A_1(g) = B_1(f) = 1/2\,,$$

$$A_{2p}(g) = (-1)^{p+1} \frac{2}{(4p^2-1)\pi}\,, \qquad A_{2p+1}(g) = 0\,.$$

D'autre part, puisque g est paire, nous savons d'avance que $B_n(g) = 0$.

Finalement :

$$g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos 2px .$$

9.19 Opérations linéaires. La linéarité de l'intégrale montre aussitôt que les coefficients de Fourier dépendent linéairement de la fonction. Plus précisément, soient f et g deux fonctions de période 2π et intégrables sur $[a, a+2\pi]$, et soient λ et μ deux scalaires. Alors

$$A_n(\lambda f+\mu g) = \lambda A_n(f)+\mu A_n(g),$$
$$B_n(\lambda f+\mu g) = \lambda B_n(f)+\mu B_n(g),$$
$$C_n(\lambda f+\mu g) = \lambda C_n(f)+\mu C_n(g).$$

Ces formules restent évidemment valables lorsque la période n'est plus nécessairement 2π.

9.20 Produit de convolution. Soient f et g deux fonctions continues de période 2π. On appelle *produit de convolution* de f et de g et on note $f * g$ la fonction définie par la formule

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y .$$

On démontre aisément que le produit de convolution est commutatif :

$$f*g = g*f .$$

En outre, $f * g$ est continue et de période 2π. Les coefficients de Fourier de $f * g$ sont définis par la formule

$$C_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x .$$

La théorie des intégrales doubles (voir tome 5) montre que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations :

$$C_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y .$$

La quantité entre crochets n'est autre que $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ny}C_n(f)$ (voir n° 9.18). Comme $C_n(f)$ est une constante, l'intégrale s'écrit

$$C_n(f*g) = C_n(f)\,.\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ny}\,\mathrm{d}y = C_n(f)\,C_n(g) .$$

En résumé, le coefficient de Fourier C_n d'un produit de convolution est le produit des coefficients de Fourier de chacun des facteurs :

$$C_n(f*g) = C_n(f)\,C_n(g) .$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons

$$A_n[f*g] = \tfrac{1}{2}[A_n(f).A_n(g) - B_n(f).B_n(g)],$$
$$B_n[f*g] = \tfrac{1}{2}[A_n(f).B_n(g) + A_n(g).B_n(f)].$$

9.21 Egalité de Parseval. Les coefficients de Fourier du produit fg (au sens ordinaire) ne sont pas liés simplement à ceux de f et de g. Il existe cependant une relation très intéressante entre les coefficients de f et de g et l'intégrale du produit fg sur une période.

En effet, puisque nous avons supposé f et g continues :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx} \qquad \text{où} \qquad C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x;$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx} \qquad \text{où} \qquad C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $g = \bar{g}$ et que $C_{-n}(g) = \overline{C_n(g)}$,

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{-n}(g)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{-n}(g)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\right)\mathrm{d}x.$$

Si l'on suppose la série uniformément convergente sur $[a, a+2\pi]$, nous pouvons intervertir l'intégration et la sommation :

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{-n}(g)\,\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x,$$

soit encore

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)\,C_{-n}(g).$$

En particulier, si $f = g$, nous obtenons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)\,C_{-n}(f).$$

Comme $C_{-n} = \bar{C}_n$, nous pouvons encore écrire

$$C_n\,C_{-n} = |C_n|^2 = \tfrac{1}{2}(A_n + \mathrm{j}B_n)\,\tfrac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}B_n) = \tfrac{1}{4}(A_n^2 + B_n^2).$$

Ainsi, puisque $C_0 = A_0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2 + B_n^2).$$

En résumé,

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = A_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n^2+B_n^2).$$

Cette relation est très importante en physique lors des calculs d'énergie : en effet, l'intégrale de gauche est la valeur efficace de f, et l'énergie d'un harmonique est proportionnelle au carré de son applitude.

APPLICATION À L'ÉTUDE D'UN SIGNAL

9.22 Notations. Soit f un signal périodique (Fig. 9.17).

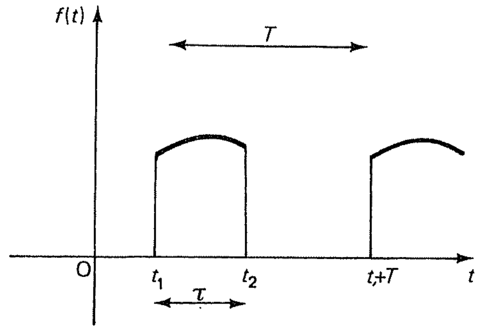


FIG. 9.17

Nous désignerons par

T la période de récurrence;
f_r la fréquence de récurrence;
ω la pulsation de récurrence :

$$\omega = 2\pi f_r = 2\pi/T\ ;$$

τ la durée;
α le coefficient d'utilisation, ou facteur de régime :

$$\alpha = \tau/T\ ;$$

r_c le rapport cyclique :

$$r_c = \tau/(T-\tau)\ ;$$

r_f le facteur de forme, c'est-à-dire le rapport entre la valeur efficace et la valeur moyenne de la fonction pendant une période :

$$r_f = \frac{y_{\text{eff}}}{y_0} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t}}{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2}{C_0}$$

L'analyse d'un signal consiste d'une part à expliciter toutes ces grandeurs et d'autre part à effectuer le bilan énergétique. A cet effet, il convient de représenter graphiquement les amplitudes des divers harmoniques.

9.23 Spectre de fréquences. La représentation graphique de la variation de l'amplitude des harmoniques en fonction de n porte les noms de *spectre de fréquence*, de *diagramme spectral* ou de *diagramme de raies*. Suivant la forme adoptée pour les coefficients de Fourier, plusieurs types de présentation sont possibles.

Ces diagrammes sont très employés en physique, puisqu'ils relatent les informations nécessaires pour la définition des fonctions auxquelles ils se rapportent.

On peut représenter séparément les coefficients A_n et B_n, surtout lorsque la fonction f est paire ou impaire (Fig. 9.18).

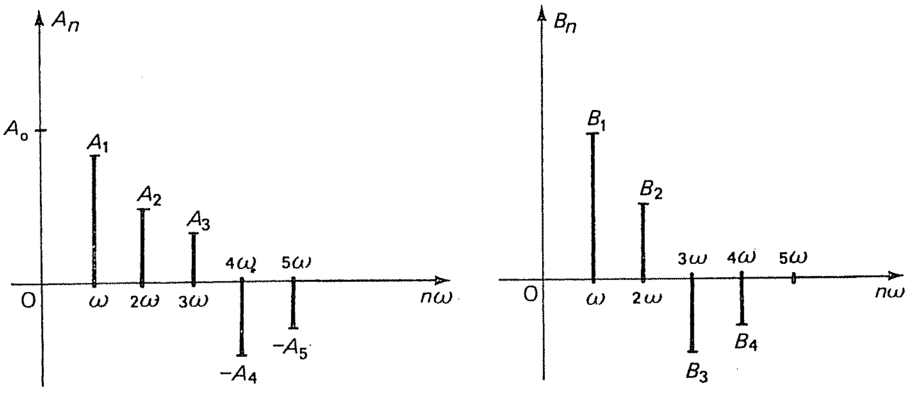


FIG. 9.18

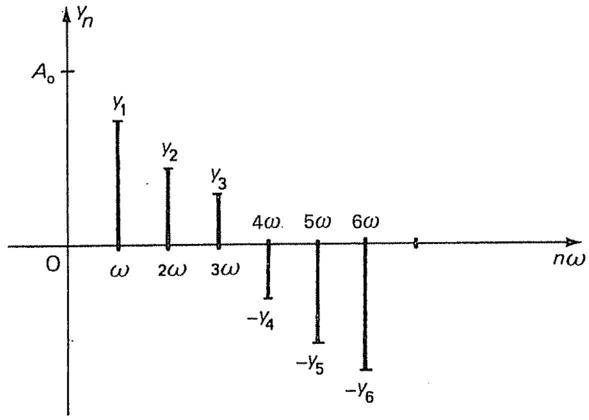


FIG. 9.19

Lorsque f n'est ni paire ni impaire, on préfère tracer un diagramme unique en adoptant la forme

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

avec $Y_n = \pm\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ (Fig. 9.19).
On trouve parfois en ordonnées Y_n^2, ou encore Y_n/Y_1, ce qui a l'avantage d'être homogène à un nombre.

De même, en abscisses, on porte indifféremment $n\omega$, nf_r, n ou $n\alpha$.

Dans le cas des coefficients complexes, on porte le module de C_n en ordonnées; le spectre de fréquences se dessine de part et d'autre de l'axe des ordonnées, puisque cette fois n appartient à **Z** et non plus à **N** (Fig. 9.20).

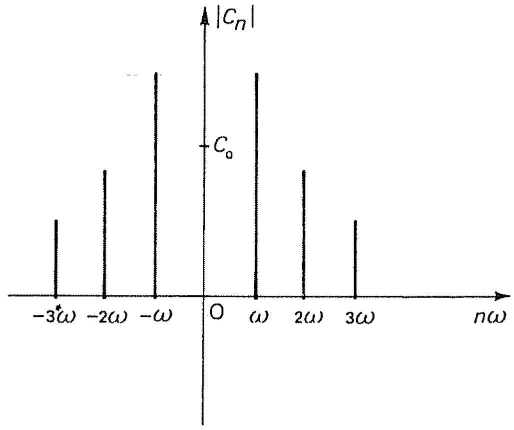


FIG. 9.20

9.24 Courbe enveloppe du spectre. Quel que soit le mode de représentation choisi, le diagramme de fréquences est discontinu, puisque la variable ne prend

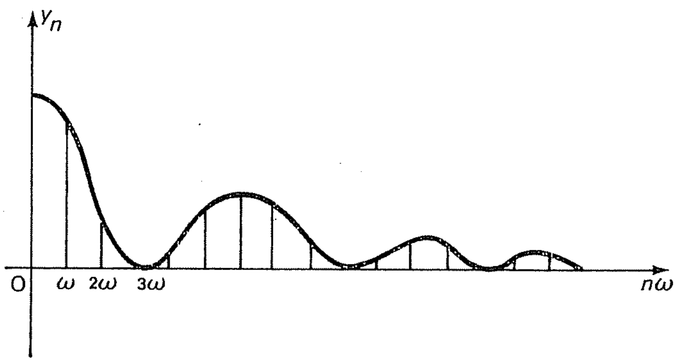


FIG. 9.21

que des valeurs entières (ou multiples d'un même nombre). En pratique, on essaie d'interpoler un tel diagramme à l'aide d'une courbe continue, appelée *courbe enveloppe du spectre* (Fig. 9.21).

Il existe une infinité de manières d'interpoler le diagramme des fréquences; le problème est de trouver une fonction continue « simple » répondant à la question, autrement dit une fonction définie par une « formule ».

La connaissance d'une équation d'une courbe enveloppe est très utile en physique, car elle permet de prévoir l'importance des divers harmoniques et d'avoir une idée de la rapidité avec laquelle la série de Fourier converge.

EXEMPLE. *Déterminons le diagramme spectral et la courbe enveloppe dans le cas d'un signal rectangulaire défini par*

$$\begin{aligned} f(t) &= E \qquad \text{si } t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ &= 0 \qquad \text{si } t \in \,]\tau/2, T-\tau/2[\end{aligned}$$

(Fig. 9.22).

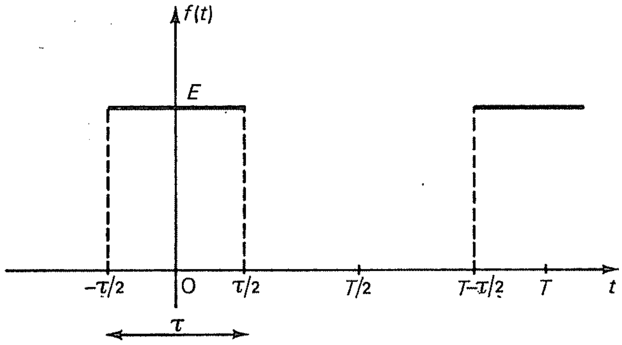


FIG. 9.22

Prenons la forme complexe des coefficients de Fourier. Si $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{E}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{E}{-\mathrm{j}n\omega T}\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{-E}{\mathrm{j}n2\pi}\left[\exp\left(-\mathrm{j}n\,\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(\mathrm{j}n\,\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Soit encore

$$C_n = \frac{E}{n\pi}\sin n\alpha\pi,$$

où $\alpha = \tau/T$. D'autre part, un calcul direct montre que

$$C_0 = E\alpha\,.$$

Dans le cas présent, la courbe enveloppe est en évidence : il suffit de prendre le graphe de la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = E\alpha \left|\frac{\sin x}{x}\right| \qquad \text{si } x \neq 0$$

et prolongée par continuité à l'origine :

$$\psi(0) = E\alpha .$$

La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est souvent utilisée en mathématiques. Son graphe passe par des maximums et des minimums successifs dont l'amplitude diminue et tend vers 0 (Fig. 9.23).

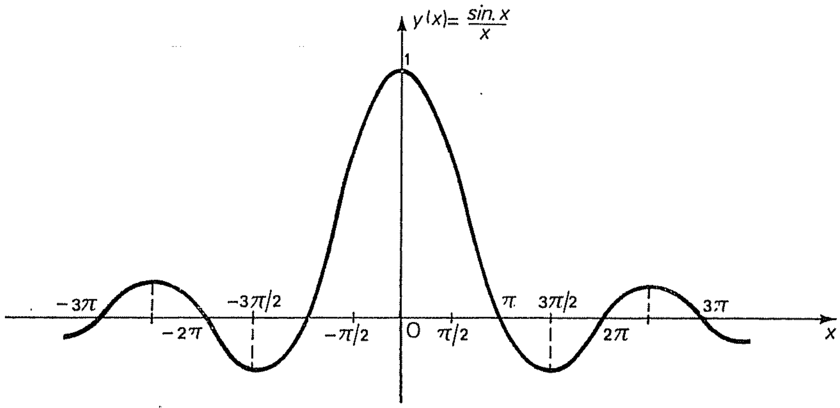


FIG. 9.23

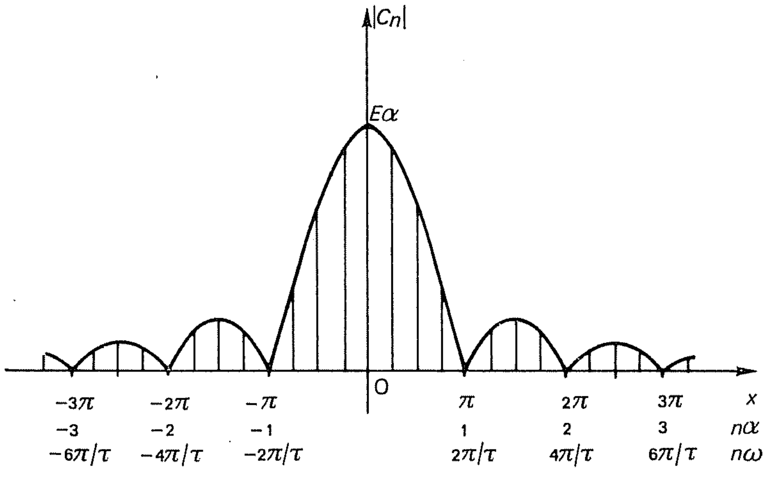


FIG. 9.24

Pour tracer la courbe enveloppe du spectre, il suffit de prendre la valeur absolue de $\varphi(x)$ et de la multiplier par $E\alpha$ (Fig. 9.24).

9.25 Analyse d'un signal. L'analyse d'un signal comporte, outre la détermination des paramètres introduits au nº 9.22, celle de la courbe enveloppe du spectre de fréquences. On déterminera enfin un nombre fini d'harmoniques (c'est-à-dire la bande passante) qu'il est nécessaire de transmettre pour que le signal conserve pratiquement toute son énergie. En effet, un quadripôle ou un amplificateur, si perfectionné soit-il, ne peut physiquement posséder une bande passante infinie. Il est donc impossible de retrouver à la sortie tous les harmoniques du signal donné.

Il n'y a pas de méthode générale valable pour tous les types de signaux; mais il est souvent possible de mettre à profit l'équation de la courbe enveloppe du spectre de fréquences. On commencera par repérer les points remarquables de cette courbe : maximums, minimums, intersections avec l'axe des abscisses.

9.26 Analyse d'un signal trapézoïdal. Considérons la fonction f définie par les formules

$$
\begin{aligned}
f(t) &= E\,\frac{\tau+2t}{\tau-\theta} && \text{si } t\in[-\tau/2,\ -\theta/2] \\
&= E && \text{si } t\in]-\theta/2,\ \theta/2] \\
&= E\,\frac{\tau-2t}{\tau-\theta} && \text{si } t\in]\theta/2,\ \tau/2] \\
&= 0 && \text{si } t\in]\tau/2,\ T-\tau/2[
\end{aligned}
$$

(Fig. 9.25).

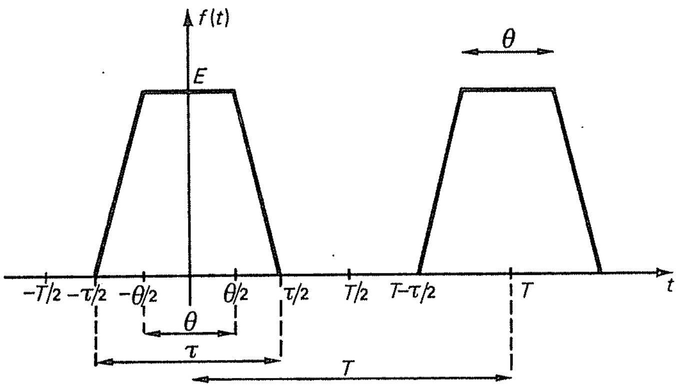


Fig. 9.25

Lorsque $\theta = 0$, on obtient un signal triangulaire; lorsque $\theta = \tau$, on retrouve le signal rectangulaire.

Valeur moyenne. Compte tenu de la symétrie de la courbe par rapport à l'axe Oy, nous obtenons

$$A_0 = u_0 = \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\theta/2} E\mathrm{d}t + \int_{\theta/2}^{\tau/2}\left(\frac{-2E}{\tau-\theta}\,t + \frac{E\tau}{\tau-\theta}\right)\mathrm{d}t\right\}.$$

Un calcul élémentaire conduit à

$$u_0 = A_0 = C_0 = \frac{E}{2}\,\alpha(1+\beta),$$

où $\alpha = \tau/T$ et $\beta = \theta/\tau$.

Valeur efficace. On trouve de même

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{E}{\sqrt{3}}\sqrt{\alpha(1+2\beta)}.$$

Coefficients de Fourier. La fonction f étant paire, il est naturel de prendre la forme trigonométrique (les coefficients B_n étant nuls). Le coefficient A_0 ayant déjà été calculé, supposons $n \neq 0$. Alors

$$A_n = 2\left\{\frac{2}{T}\left[\int_0^{\theta/2} E\cos n\omega t\mathrm{d}t + \int_{\theta/2}^{\tau/2}\left(\frac{-2E}{\tau-\theta}\,t + \frac{E\tau}{\tau-\theta}\right)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\right]\right\}$$

$$= \frac{4E}{T}\left[\frac{1}{n\omega}\,[\sin n\omega t]_0^{\theta/2} - \frac{2}{\tau-\theta}\int_{\theta/2}^{\tau/2} t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t + \frac{\tau}{\tau-\theta}\left(\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\right)_{\theta/2}^{\tau/2}\right]$$

$$= \frac{2E}{n\pi}\left\{\sin\frac{n\omega\theta}{2} - \frac{2}{\tau-\theta}\left[t\sin n\omega t + \frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_{\theta/2}^{\tau/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau}{\tau-\theta}\left(\sin\frac{n\omega\tau}{2} - \sin\frac{n\omega\theta}{2}\right)\right\}.$$

En calculant les valeurs aux bornes, on constate que les termes en sinus se détruisent deux à deux. Il reste

$$A_n = \frac{2E}{n^2\pi^2}\cdot\frac{T}{(\tau-\theta)}\left(\cos n\omega\frac{\theta}{2} - \cos n\omega\frac{\tau}{2}\right).$$

Compte tenu de la relation $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$, il vient:

$$A_n = \frac{-4E}{n^2\pi^2}\frac{T}{(\tau-\theta)}\sin\left[n\left(\frac{\theta+\tau}{T}\right)\frac{\pi}{2}\right]\sin\left[n\left(\frac{\theta-\tau}{T}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

c'est-à-dire

$$A_n = \frac{4E}{n^2\pi^2(\alpha-\alpha')}\sin\left[\frac{n\pi(\alpha+\alpha')}{2}\right]\sin\left[\frac{n\pi(\alpha-\alpha')}{2}\right],$$

avec $\alpha' = \theta/T$.

Nous nous contenterons de chercher la courbe enveloppe du spectre des fréquences dans les deux cas particuliers qui vont suivre.

9.27 Analyse d'un signal rectangulaire. Envisageons le cas où $\theta = \tau$. Nous retrouvons le signal rectangulaire déjà rencontré au n° 9.9. Les résultats ci-dessus se spécialisent en les suivants :

Valeur moyenne : $A_0 = \alpha E$.
Valeur efficace : $u_{\text{eff}} = E\sqrt{\alpha}$.
Facteur de forme : $r_f = 1/\sqrt{\alpha}$.

Série de Fourier. Si $\alpha = \alpha'$, l'expression précédente n'a pas de sens, car le dénominateur s'annule. Mais nous avons déjà calculé les coefficients de Fourier de f sous la forme complexe au n° 9.24. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, nous obtenons

$$A_n = \frac{2E}{n\pi} \sin n\alpha\pi .$$

Le développement en série de Fourier est donc

$$f(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E \sin n\alpha\pi}{n\pi} \cos n\omega t .$$

Il est souvent plus commode de présenter cette série sous la forme

$$f(t) = E\alpha \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha\pi}{n\alpha\pi} \cos n\omega t \right],$$

car elle se prête mieux à l'étude de la courbe enveloppe.

Spectre de fréquence. Comme dans le cas des coefficients complexes, une équation d'une courbe enveloppe est en évidence : il suffit de prendre cette fois

$$\psi(x) = 2E\alpha \frac{\sin x}{x} \qquad \text{si } x > 0$$

$$\psi(0) = 2E\alpha .$$

Dans le cas présent, la courbe enveloppe est définie seulement pour x positif (Fig. 9.26).

La courbe enveloppe coupe l'axe des abscisses chaque fois que x est un multiple de π. Le premier point est obtenu lorsque $x = \pi$. Supposons pour simplifier que $1/\alpha$ soit un entier n_0. L'intervalle $[0, 1]$ de l'axe des abscisses contient alors les n_0 premiers harmoniques, et la bande passante nécessaire à la retransmission de ces harmoniques est

$$\Delta F = \frac{1}{\alpha} f_r = \frac{1}{\tau} .$$

Nous aboutissons déjà à une conclusion intéressante, qui montre que la bande

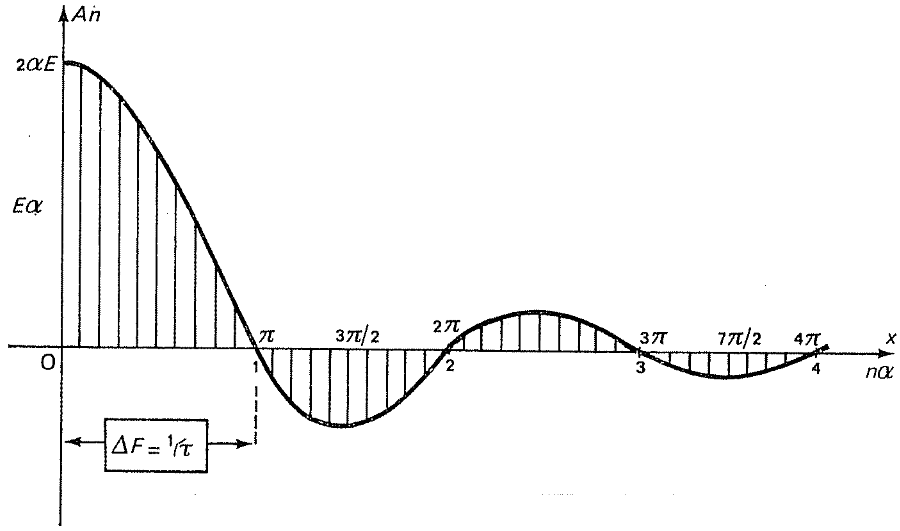


FIG. 9.26

passante nécessaire à la retransmission des $1/\alpha$ premiers harmoniques est égale à l'inverse de la durée d'un signal rectangulaire.

Il reste maintenant à trouver un moyen permettant de voir si ce nombre $1/\alpha$ d'harmoniques est pratiquement suffisant.

Une méthode classique consiste à calculer le rapport entre l'énergie totale fournie par l'ensemble infini des composantes du spectre et celle qui est fournie par les n_0 premiers harmoniques. Pour déterminer ce rapport, il est théoriquement possible d'utiliser l'égalité de Parseval, mais la détermination de la somme des séries qu'elle met en évidence présente des difficultés. Aussi est-il préférable dans la plupart des cas d'assimiler le spectre discontinu à sa courbe enveloppe, et de calculer l'énergie que fournirait un signal équivalent à cette courbe enveloppe dans les intervalles $[0, \pi]$ et $[0, +\infty[$. Les résultats ainsi obtenus sont bien entendu différents des énergies réelles, mais leur rapport est sensiblement le même que celui des énergies cherchées.

Comme l'énergie fournie par un signal f est proportionnelle à l'intégrale de son carré, l'énergie totale depuis 0 jusqu'à $+\infty$ que fournirait la courbe enveloppe est proportionnelle à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Dans les mêmes conditions, l'énergie fournie par les $1/\alpha$ premiers harmoniques est proportionnelle à

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

puisque $x = \pi$ lorsque $n = 1/\alpha$.

Le problème est donc ramené à celui de l'intégrale

$$J(y) = \int_0^y \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Intégrons par parties en posant $u = \sin^2 x$ et $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x/x^2$:

$$J(y) = \left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^y + \int_0^y \frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons enfin $2x = t$ dans la dernière intégrale. Comme $(\sin^2 x)/x$ tend vers 0 avec x, il vient

$$J(y) = -\frac{\sin^2 y}{y} + \int_0^{2y} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Le calcul de cette intégrale ne peut se faire avec l'aide des fonctions élémentaires étudiées au tome 2; c'est pourquoi l'on introduit une nouvelle fonction, appelée *sinus intégral*, définie par

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

La variation de cette fonction est représentée figure 9.27. On démontre par des méthodes non élémentaires que

$$\mathrm{Si}\,(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Si}\,(x) = \pi/2 \approx 1{,}570.$$

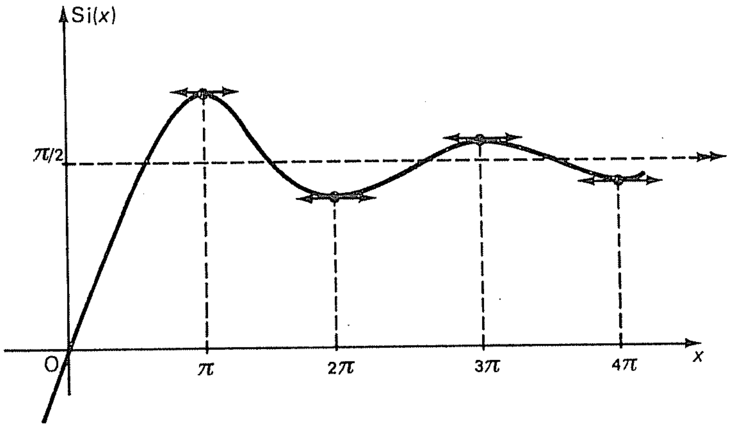


FIG. 9.27

Ainsi,

$$J(\pi) = \mathrm{Si}\,(2\pi) \approx 1{,}418$$

(valeur donnée par une table de la fonction sinus intégral). Le rapport entre l'énergie totale W_T et l'énergie fournie par les $1/\alpha$ premiers harmoniques est donc égal à

$$\frac{W_T}{W_{1/\alpha}} = \frac{\text{Si}\,(+\infty)}{\text{Si}\,(2\pi)} \approx \frac{1{,}570}{1{,}418},$$

d'où

$$W_{1/\alpha} \approx \frac{1{,}418}{1{,}570}\, W_T \approx 0{,}9\, W_T.$$

Par conséquent, les $1/\alpha$ premiers harmoniques d'un signal rectangulaire fournissent 90% de l'énergie totale.

Il n'est donc pratiquement pas rentable de prévoir une bande passante supérieure à $\Delta F = 1/\tau$ pour les circuits ou appareils destinés à recevoir ce signal. Il est sous-entendu ici que nous n'avons envisagé que l'aspect énergétique du problème et que si la retransmission de la forme exacte du signal importe, comme par exemple dans les amplificateurs d'oscilloscope ou en télévision, une étude plus spécialisée de la question montrerait qu'il est nécessaire de multiplier cette bande passante ΔF par un coefficient égal ou supérieur à 10. C'est un des grands problèmes de «l'électronique rapide».

9.28 Analyse d'un signal triangulaire. Si nous prenons $\theta = 0$, nous obtenons le signal triangulaire de la figure 9.28.

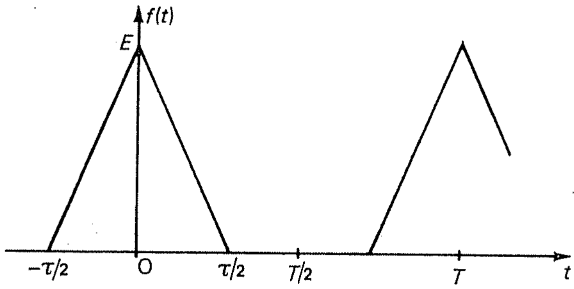


FIG. 9.28

Comme θ est nul, il en est de même de β. On trouve successivement :

$$u_0 = \frac{E\alpha}{2} \text{ (valeur moyenne)};$$

$$u_{\text{eff}} = E\sqrt{\alpha}/\sqrt{3} \text{ (valeur efficace)};$$

$$B_n = 0, \text{ car la fonction est paire};$$

$$A_n = \frac{4E\alpha}{n^2\pi^2\alpha^2}\sin^2 n\alpha\pi/2.$$

D'où le développement de f en série de Fourier :

$$f(t) = E\alpha\left[\frac{1}{2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\alpha\pi/2}{n^2\pi^2\alpha^2}\cos n\omega t\right].$$

Pour obtenir la courbe enveloppe du spectre, écrivons A_n sous la forme

$$A_n = E\alpha\,\frac{\sin^2 n\alpha\pi/2}{n^2\pi^2\alpha^2/4}.$$

On peut donc prendre pour courbe enveloppe le graphe de la fonction

$$x \mapsto E\alpha\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

lequel se déduit aisément de celui de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (Fig. 9.29).

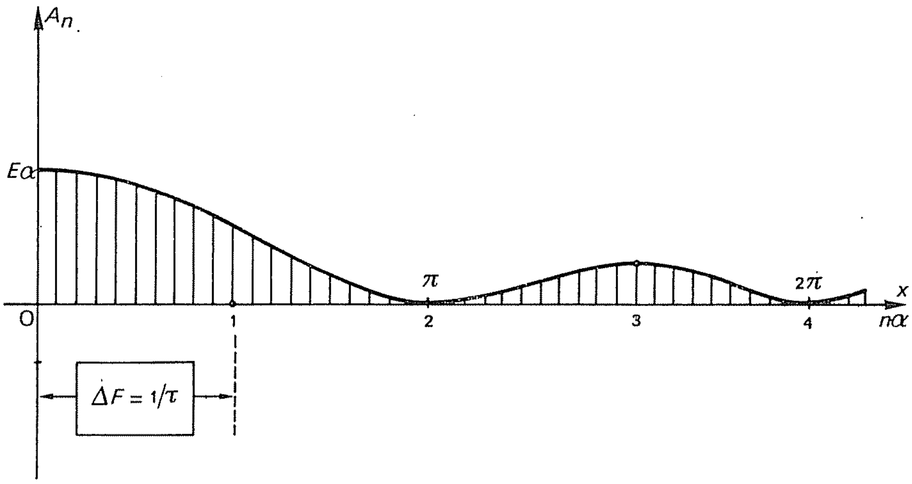


FIG. 9.29

Si nous comparons le spectre du signal triangulaire avec celui du signal rectangulaire, nous constatons que dans l'intervalle de fréquences défini par $\Delta F = 1/\tau$, les $1/\alpha$ premiers harmoniques fournissent une énergie supérieure à celle produite par les harmoniques de mêmes rangs du signal rectangulaire.

9.29 Analyse d'un signal en impulsion sinusoïdale. Soit f la fonction périodique définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{1-\cos\omega\tau/2}(\cos\omega t - \cos\omega\tau/2) && \text{si } t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ &= 0 && \text{si } t \in \,]\tau/2, T-\tau/2] \end{aligned}$$

(Fig. 9.30).

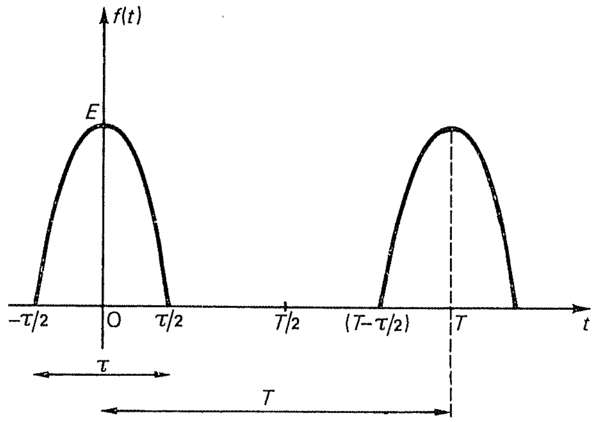


FIG. 9.30

Pour alléger les notations, posons $\omega t = x$. La quantité $\theta = \omega\tau/2$ est alors appelée angle de passage du signal. Effectuons un changement de coordonnées tel que le signal ait pour équation $Y = A \cos X$ (Fig. 9.31).

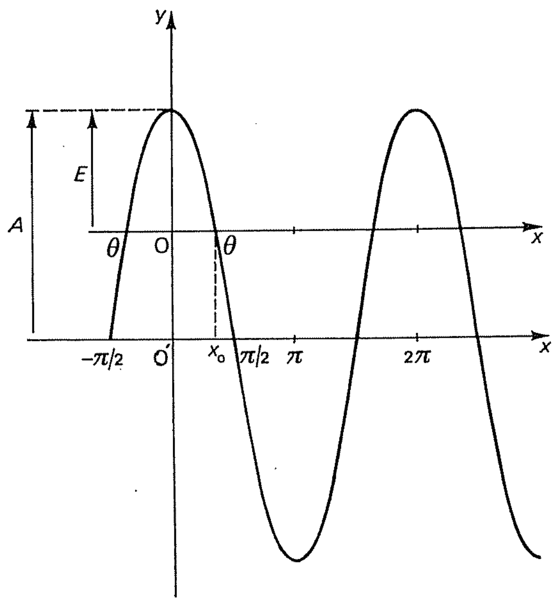


FIG. 9.31

Les coordonnées du point O dans le nouveau repère sont $(0, A \cos \theta)$. Le point P a pour anciennes coordonnées $(\theta, 0)$ et pour nouvelles coordonnées $(X_0, A \cos X_0)$.

Les formules de changement de coordonnées sont

$$x = X, \qquad y = Y - Y_0.$$

Ainsi, $y = A\cos X - A\cos\theta$, où $A = A\cos\theta + E$; ceci implique que

$$A = \frac{E}{1-\cos\theta}.$$

Par suite, le signal est représenté par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{E}{1-\cos\theta}(\cos x - \cos\theta) \qquad && \text{si } x \in [-\theta, \theta] \\ &= 0 && \text{si } x \in]\theta, 2\pi-\theta[. \end{aligned}$$

Calculons maintenant les coefficients de Fourier de f :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{E}{1-\cos\theta}(\cos x - \cos\theta)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{E}{\pi}\left(\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) = \frac{E}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi - \alpha\pi\cos\alpha\pi}{1-\cos\alpha\pi}\right). \end{aligned}$$

Les coefficients B_n sont nuls puisque la fonction est paire :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{0} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\theta} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Si l'on pose $x = -u$ la première intégrale s'écrit :

$$\int_{\theta}^{0} f(-u)\cos(-nu)(-\mathrm{d}u) = -\int_{\theta}^{0} f(u)\cos nu\,\mathrm{d}u = \int_0^{\theta} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,;$$

par conséquent :

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2E}{\pi(1-\cos\theta)}\int_0^{\theta}(\cos x - \cos\theta)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2E}{\pi(1-\cos\theta)}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\theta}(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)\,\mathrm{d}x - \cos\theta\int_0^{\theta}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$A_1 = \frac{E}{\pi(1-\cos\theta)}[\theta - \sin\theta\cos\theta],$$

et que, si $n \neq 1$,

$$A_n = \frac{E\alpha}{n(1-\cos\alpha\pi)}\left(\frac{\sin(n-1)\alpha\pi}{(n-1)\alpha\pi} - \frac{\sin(n+1)\alpha\pi}{(n+1)\alpha\pi}\right).$$

Cas particulier où $\tau = T/2$. On retrouve alors le signal redressé à une alternance (nº 9.10).

Pour déterminer la courbe enveloppe, écrivons A_n sous la forme suivante :

$$A_n = \frac{E}{n+1}\,\frac{\sin(n-1)\pi/2}{(n-1)\pi/2}.$$

La courbe enveloppe est donc le graphe de la fonction

$$\psi : x \mapsto \frac{E\pi}{2(x+\pi)}\,\frac{\sin x}{x}.$$

(On remarquera que $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x) = E/2 = A_1$.) La courbe enveloppe du spectre oscille autour de l'axe des abscisses, mais décroît plus vite que celle du signal rectangulaire (Fig. 9.32).

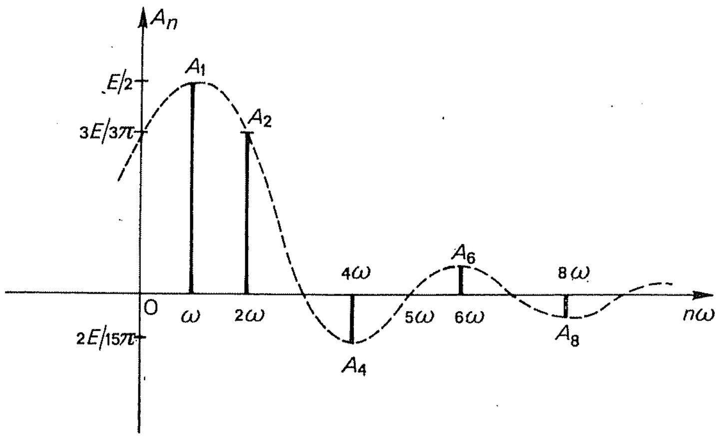


FIG. 9.32

EXERCICES

Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :

9.1 f de période 2π

$$\begin{aligned} f(x) &= x/\pi+1 && \text{si } x\in]0, \pi[\\ &= -x/\pi && \text{si } x\in]\pi, 2\pi[\\ f(0) &= -1/2 && f(\pi)=1/2. \end{aligned}$$

9.2 f impaire de période 2π :

$$f(x)=x(\pi-x) \qquad \text{si } x\in[0, \pi].$$

9.3 f de période 2π :

$$f(x) = e^x \qquad \text{si } x\in[0, 2\pi[.$$

9.4 f de période 2π :

$$f(x) = x^2 \qquad \text{si } x\in[-\pi, \pi].$$

9.5 f paire de période 2π :

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 && \text{si } x\in]0, \pi/3[\\ &= 0 && \text{si } x\in]\pi/3, 2\pi/3[\\ &= 1 && \text{si } x\in]2\pi/3, \pi[\\ f(\pi/3) &= -1/2 && f(2\pi/3)=1/2. \end{aligned}$$

9.6 f impaire de période 2π :

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{si } x\in [0, \pi/3] \\ &= \pi/3 && \text{si } x\in]\pi/3, 2\pi/3[\\ &= \pi-x && \text{si } x\in [2\pi/3, \pi]. \end{aligned}$$

9.7 f de période 2π :

$$f(x) = \cos px \qquad \text{si } x\in[-\pi, \pi], \qquad \text{où } p\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}.$$

9.8 Soit f la fonction de période 2π définie par

$$f(x) = \operatorname{sh} x \qquad \text{si } x\in]-\pi, \pi[\qquad \text{et} \qquad f(\pi)=0.$$

Déterminer la série de Fourier de f; calculer sa somme au point π.

9.9 Soit f la fonction de période 2π définie par

$$f(x) = \frac{V}{\pi}x \qquad \text{si } x\in]-\pi, 0[\qquad f(x) = v \qquad \text{si } x\in[0, \pi].$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. Si $V=10v$, calculer l'amplitude de l'harmonique de rang 3.

9.10 Soit le signal de période T défini par

$$\begin{aligned} f(t) &= mt && \text{si } t\in[0, \theta] \\ &= \frac{m\theta}{\theta-T}(t-T) && \text{si } t\in]\theta, T[, \end{aligned}$$

où $m>0$, $\theta\in[0, T[$.

a) Construire le graphe de f.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f sous forme réelle et sous forme complexe.

c) Calculer $|C_n|$.

d) Lorsque $m=1$ et que $\theta = T/2$, calculer l'amplitude de l'harmonique de rang 2.

9.11 Soit f la fonction impaire de période 2π définie par

$$f(x) = -x^2+\pi x \qquad \text{si } x \in [0, \pi].$$

a) Construire le graphe de f.

b) Déterminer le développement de f en série de Fourier.

c) En déduire la somme de la série de terme général $((-1)^p/(2p+1)^3)$. (On remplacera x par $\pi/2$.)

9.12 Soit f la fonction de période 2π définie par

$$f(x) = x+x^2 \qquad \text{si } x \in [0, 2\pi[.$$

a) Construire le graphe de f.

b) Déterminer le développement de f en série de Fourier.

c) En déduire la somme de la série de Riemann alternée de terme général $((-1)^{n+1}/n^2)$. (On remplacera x par π.)

d) Calculer de même la somme de la série de Riemann de terme général $(1/n^2)$.

9.13 Soit f la fonction de période T dont le graphe est représenté ci-dessous :

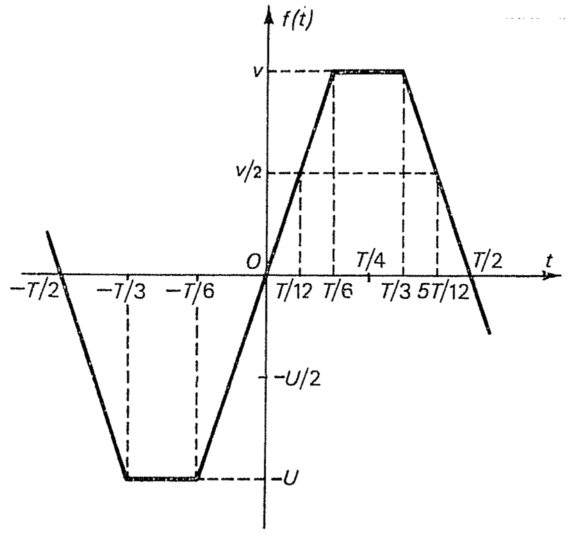


FIG. 9.33

On attaque le circuit suivant, dans lequel les diodes sont supposées parfaites, par un générateur délivrant la fonction $u = f(t)$:

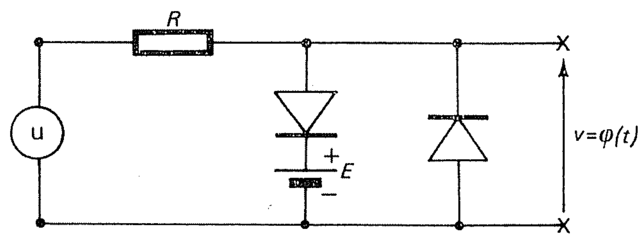


FIG. 9.34

a) Construire le graphe du signal de sortie $v = \varphi(t)$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de φ.
c) Calculer l'amplitude de l'harmonique de rang 3.

9.14 On attaque le circuit suivant par $u = U\cos\omega t = f(t)$, où U désigne l'amplitude du signal et où $E = U/2$:

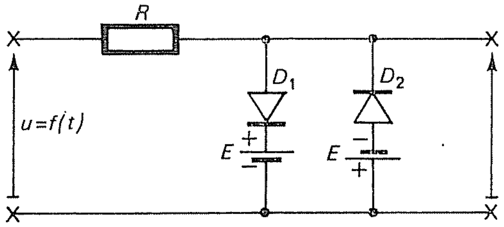


FIG. 9.35

a) Construire le graphe du signal de sortie $v = \varphi(t)$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de φ.
c) Calculer l'amplitude de la fondamentale en fonction de U.
d) Si $U = 100$ volts, calculer la valeur efficace de la fondamentale.

9.15 On considère un générateur délivrant une tension de période T définie par

$$f(t) = E \quad \text{si } t \in [-T/3, T/3]$$
$$= -E \quad \text{si } t \in]T/3, 2T/3[.$$

a) Construire le graphe de f.
b) Déterminer le développement de f en série de Fourier.
c) On applique ce signal à l'entrée du circuit ci-dessous :

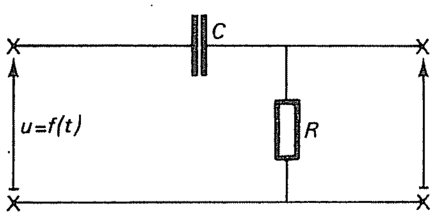


FIG. 9.36

Déterminer la série de Fourier du signal de sortie $v = \varphi(t)$.

9.16 On considère un générateur de tension délivrant un signal de période T défini par

$$f(t) = -10U\exp(-t/\theta_1) \quad \text{si } t \in [0, 2T/3]$$
$$= 10U\exp(-t/\theta_2) \quad \text{si } t \in]2T/3, T[.$$

a) Construire le graphe de f.
b) Sachant que la tangente au point $(0, -10U)$ a pour équation

$$y = 10U\left(\frac{3t}{T} - 1\right),$$

calculer l'énergie dissipée dans la résistance R du circuit ci-dessous :

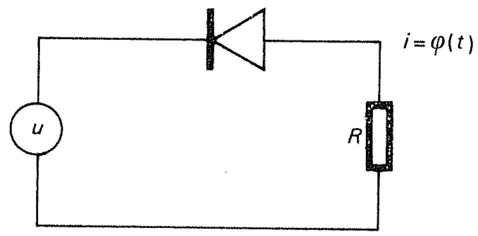


FIG. 9.37

c) Déterminer les coefficients de Fourier de φ.

9.17 On considère le signal défini par la figure ci-dessous :

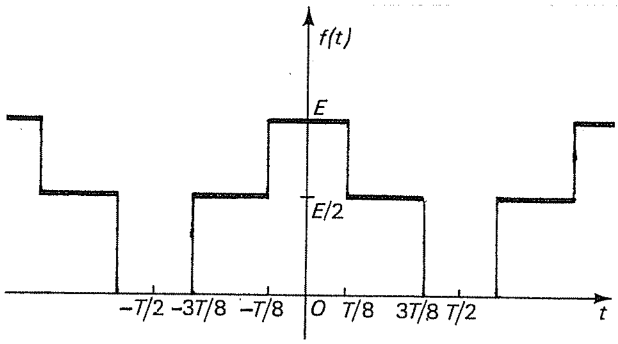


FIG. 9.38

a) Calculer la valeur efficace de ce signal.
b) Comparer son énergie avec celle qui est contenue dans la fondamentale et dans l'harmonique 3.

CHAPITRE 10

TRANSFORMATION DE FOURIER

10.1 Équations de convolution. Nous venons de voir qu'une fonction périodique f peut être représentée comme la somme d'une série trigonométrique :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)\, e^{jn\omega t}.$$

Rappelons que les coefficients d'un produit de convolution $f * g$ sont liés simplement à ceux de chacun des facteurs :

$$C_n(f * g) = C_n(f)\, C_n(g).$$

Soient maintenant a et b deux fonctions données de période T. Considérons l'équation de convolution

$$a * f = b,$$

où f est une fonction périodique inconnue. D'après ce qui précède, les coefficients de Fourier de f sont nécessairement définis par

$$C_n(a)\, C_n(f) = C_n(b).$$

Pour résoudre les équations de convolution dans le cas des fonctions non nécessairement périodiques, on est amené à associer à toute fonction non plus une série trigonométrique, mais une intégrale. Nous allons indiquer comment s'introduit cette intégrale, à l'aide d'un passage à la limite.

10.2 Transformation de Fourier. Soit f une fonction à valeurs complexes sur un intervalle $[-T/2, T/2[$. Nous pouvons considérer f comme la restriction à cet intervalle d'une fonction définie sur $\mathbf{R}$ de période T. Examinons ce que devient le développement en série de Fourier de f lorsque T tend vers $+\infty$.

Posons $\omega = 2\pi/T$ et utilisons la forme complexe de la série de Fourier de f :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)\, e^{jn\omega t}, \qquad \text{où} \qquad C_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jn\omega x}\, dx. \quad (1)$$

Considérons un intervalle de faible longueur $[y, y+\Delta y]$. Les valeurs de n pour lesquelles $n\omega = n.2\pi/T$ appartient à cet intervalle sont environ au nombre de $(T/2\pi)\,\Delta y$. Le paquet de termes correspondant,

$$\sum_{n\omega \in [y, y+\Delta y]} C_n(f)\, e^{jn\omega t},$$

peut approximativement s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} T \Delta y\, e^{jyt} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jyx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \Delta y\, e^{jyt}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-jyx}\, dx.$$

Comme T est très grand, nous pouvons remplacer cette intégrale par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\, \mathrm{d}x$$

(en supposant que cette dernière intégrale est convergente).

Enfin, la somme (1) peut s'écrire comme somme de tous les paquets correspondant à des intervalles de longueur Δy mis bout à bout. Nous obtenons ainsi la formule

$$f(t) = \sum \frac{\Delta y}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}yt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\, \mathrm{d}x\,.$$

Faisons enfin tendre Δy vers 0; il vient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}yt} \hat{f}(y)\, \mathrm{d}y, \qquad \text{où} \quad \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\, \mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

La série de Fourier (1) est donc remplacée par l'intégrale de la fonction $\hat{f}$.

En résumé,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}y(t-x)}\, \mathrm{d}x\,.$$

10.3 Formules de réciprocité de Fourier. Les considérations précédentes conduisent à poser la définition ci-dessous :

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes, dont l'intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ est absolument convergente. On appelle *transformée de Fourier* de f, et on note $\hat{f}$, ou encore $\mathscr{F}f$, la fonction définie par

$$\boxed{\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\, \mathrm{d}x\,,} \quad y \in \mathbf{R}\,. \tag{3}$$

La linéarité de l'intégration montre que la transformation de Fourier est linéaire :

$$\mathscr{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{F}f + \beta \mathscr{F}g\,.$$

Nous admettrons le **théorème fondamental** suivant :

Soit t un nombre réel. On suppose que f admet une limite à gauche $f(t-)$ et une limite à droite $f(t+)$ au point t, et que les restrictions de f à $]-\infty, t[$ et à $]t, +\infty[$ se prolongent en des fonctions dérivables au point t (l'une à gauche et l'autre à droite). Alors, si l'intégrale de $\hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}ty}$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente,

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}ty}\, \mathrm{d}y\,. \tag{4}$$

En particulier, lorsque f est continue au point t,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}ty}\, \mathrm{d}y \tag{5}$$

soit encore

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}y(t-x)}\, \mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

10.4 Exemples

1. Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\alpha t} && \text{si } t \geqslant 0 \\ &= 0 && \text{si } t < 0, \end{aligned}$$

où α est un nombre réel strictement positif (Fig. 10.1).

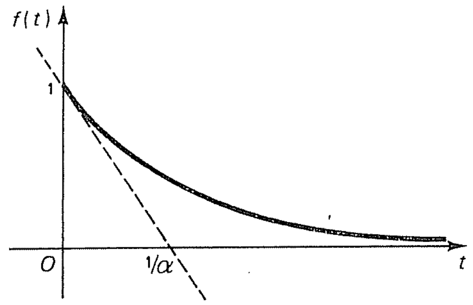


FIG. 10.1

Déterminons la transformée de Fourier de f:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-jyx}\, dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, e^{-jyx}\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+jy)x}\, dx \\ &= -\frac{1}{\alpha+jy}\left[e^{-(\alpha+jy)x}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

Comme $e^{-(\alpha+jy)x} = e^{-\alpha x} e^{-jyx}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\mathscr{F}f(y) = \frac{1}{\alpha+jy} = \frac{\alpha-jy}{\alpha^2+y^2}.$$

2. Considérons une impulsion rectangulaire isolée, définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= E && \text{si } t \in [-\tau/2,\ \tau/2] \\ &= 0 && \text{si } t < -\tau/2 \text{ ou } t > \tau/2 \end{aligned}$$

(Fig. 10.2).

La transformée de Fourier de f est définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{F}f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-jyt}\, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E\, e^{-jyt}\, dt = \frac{E}{-jy}\left(e^{-jy\tau/2} - e^{jy\tau/2}\right) \\ &= \frac{2E}{y} \cdot \frac{e^{jy\tau/2} - e^{-jy\tau/2}}{2j}, \end{aligned}$$

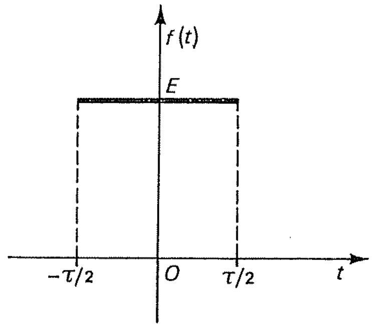


FIG. 10.2

soit encore, d'après les formules d'Euler :

$$\mathscr{F}f(y) = E\tau \frac{\sin y\tau/2}{y\tau/2}.$$

La courbe représentative de la transformée d'un signal rectangulaire ressemble donc à la courbe enveloppe du spectre de fréquence établie au chapitre 9 (Fig. 10.3).

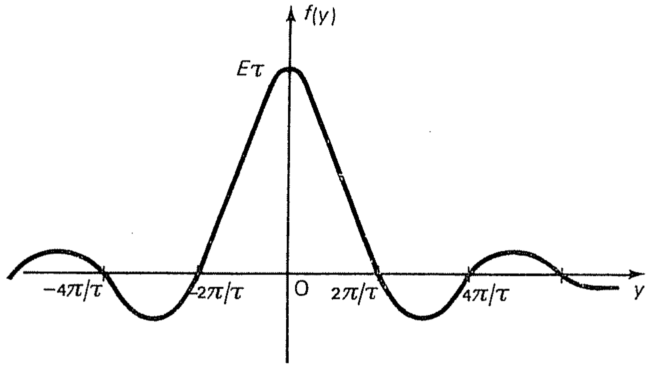


FIG. 10.3

10.5 Cas des fonctions paires ou impaires. Remplaçons dans la formule (3) l'exponentielle complexe par des fonctions circulaires :

$$\mathscr{F}f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-jyx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos yx - j \sin yx)\, dx.$$

Si f est paire, c'est-à-dire si $f(-x) = f(x)$, le changement de x en $-x$ montre que

$$\mathscr{F}f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos yx\, dx + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin yx\, dx.$$

En ajoutant membre à membre, nous obtenons

$$\mathscr{F}f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos yx\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos yx\,\mathrm{d}x\,.$$

De même, si f est impaire, c'est-à-dire si $f(-x) = -f(x)$, il reste

$$\mathscr{F}f(y) = -2\mathrm{j}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin yx\,\mathrm{d}x\,.$$

Les formules de réciprocité de Fourier se simplifient également :

— si f est paire,

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathscr{F}f(y)\cos yt\,\mathrm{d}y\,;$$

— si f est impaire,

$$f(t) = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathscr{F}f(y)\sin yt\,\mathrm{d}y\,.$$

OPÉRATIONS SUR LES TRANSFORMÉES DE FOURIER

10.6 Premières opérations. Voici quelques résultats élémentaires permettant de simplifier la recherche des transformées de Fourier :

Dérivation. Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbf{R}$, intégrable sur $\mathbf{R}$ ainsi que sa dérivée. Alors

$$\mathscr{F}f'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Intégrons par parties en posant $u = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}$ et $\mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x$. Nous obtenons aussitôt

$$\mathscr{F}f'(y) = \mathrm{j}y\mathscr{F}f(y)\,.$$

Translation. Soit τ un nombre réel. Posons

$$f_\tau(x) = f(x-\tau)\,.$$

Alors

$$\mathscr{F}f_\tau(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Le changement de variable $u = x-\tau$ conduit à

$$\mathscr{F}f_\tau(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}y\tau}\mathscr{F}f(y)\,.$$

Exemple. Considérons la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g(t) &= E && \text{si } t \in [0, \tau] \\ &= 0 && \text{si } t < 0 \text{ ou } t > \tau \end{aligned}$$

(Fig. 10.4).

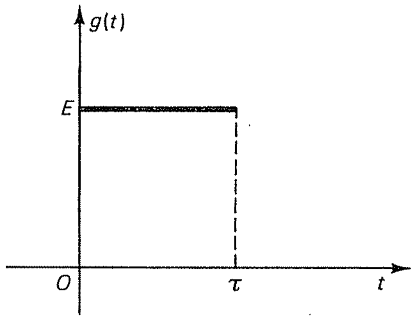


FIG. 10.4

Pour calculer la transformée de Fourier de g, nous pouvons remarquer que cette fonction est la translatée par $\tau/2$ de l'impulsion symétrique (n° 10.4). Or,

$$\mathscr{F}f(y) = E\tau\,\frac{\sin y\tau/2}{y\tau/2} = \frac{\mathrm{j}\,E}{y}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}y\tau/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}y\tau/2}).$$

Donc

$$\mathscr{F}g(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}y\tau/2}\,\frac{\mathrm{j}\,E}{y}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}y\tau/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}y\tau/2}) = \frac{\mathrm{j}\,E}{y}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}y\tau} - 1).$$

Homothétie. Soit k un nombre réel strictement positif. Posons

$$f_k(x) = f(kx).$$

Alors

$$\mathscr{F}f_k(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $u = kx$ montre que

$$\mathscr{F}f_k(y) = \frac{1}{k}\,\mathscr{F}f(y/k).$$

Cette relation est souvent utilisée dans le cas d'un changement d'unité.

10.7 Produit de convolution. Dans le cas de fonctions non nécessairement périodiques, il faut modifier le point de vue adopté au chapitre 9.

On appelle *produit de convolution* de deux fonctions f et g la fonction $f * g$ définie sur $\mathbf{R}$ par l'intégrale (si elle converge!)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cherchons la transformée de Fourier de $f * g$:

$$\mathscr{F}(f*g)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x .$$

Admettons que l'on puisse intervertir l'ordre des intégrations (voir tome 4) :

$$\mathscr{F}(f*g)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yx}\, \mathrm{d}x\right] g(t)\, \mathrm{d}t .$$

Or, la quantité entre crochets n'est autre que la transformée de Fourier de la translatée f_t de f par t; elle est donc égale à $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}yt}\mathscr{F}f(y)$. Il reste

$$\mathscr{F}f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}yt}\, \mathrm{d}t = \mathscr{F}f(y)\, \mathscr{F}g(y) .$$

En résumé,

$$\mathscr{F}(f*g) = \mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g) .$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier de chaque facteur.

Ainsi, pour résoudre l'équation de convolution

$$a * f = b ,$$

où a et b sont des fonctions données et f une fonction inconnue, on commencera par écrire

$$\mathscr{F}a \mathscr{F}f = \mathscr{F}b .$$

D'où

$$\mathscr{F}f = \mathscr{F}b / \mathscr{F}a .$$

On obtient finalement f en appliquant les formules de réciprocité de Fourier.

10.8 Produit. La transformée de Fourier d'un produit (ordinaire) s'exprime simplement à l'aide du produit de convolution des transformées de Fourier de chaque facteur. En effet,

$$(\hat{f} * \hat{g})(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y-t)\, \hat{g}(t)\, \mathrm{d}t .$$

Donc

$$\mathscr{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y-t)\, \hat{g}(t)\, \mathrm{d}t\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}xy}\, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t)\, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y-t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}xy}\, \mathrm{d}y .$$

Posons $u=y-t$; d'où $\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$ et $y=u+t$. Il vient

$$\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x(u+t)}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}xt}\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}xu}\,\mathrm{d}u\,.$$

Il ne s'agit plus cette fois de deux intégrales successives, mais du produit de deux intégrales. Au facteur $1/2\pi$ près, nous retrouvons les antécédents de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$, c'est-à-dire f et g :

$$\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g})(x) = 2\pi\mathscr{F}^{-1}\hat{f}(x)\,\mathscr{F}^{-1}\hat{g}(x) = 2\pi f(x)\,g(x)\,.$$

Finalement,

$$\mathscr{F}(fg) = \frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}f*\mathscr{F}g\,.$$

10.9 Egalité de Parseval. Comme dans le cas des séries de Fourier, on peut encore écrire une égalité de Parseval, reliant l'intégrale du carré de f à celle du carré de $\mathscr{F}f$. En effet, soient f et g deux fonctions à valeurs complexes telles que l'intégrale de $f\bar{g}$ sur $]-\infty, +\infty[$ soit convergente. D'après la formule de réciprocité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(y)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}xy}\mathrm{d}y\,.$$

Intervertissons l'ordre des intégrations :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(y)}\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\,\overline{\hat{g}(y)}\,\mathrm{d}y$$

(égalité de Plancherel).

En particulier, si $f=g$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(y)|^2\,\mathrm{d}y$$

(égalité de Parseval).

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

Changement de variable

1.1 On pose $e^x = u$; $\quad e^x dx = du$:

$$I = \int \cos u \, du = \sin u = \sin e^x.$$

1.2 On pose $\ln x = u$; $\quad dx/x = du$:

$$I = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} = \frac{1}{4} (\ln x)^4.$$

1.3 On pose $\ln x = u$, $\quad dx/x = du$:

$$I = \int \frac{du}{1+u} = \ln |1+u| = \ln |1+\ln x|.$$

1.4 On pose $\ln x = u$, $\quad dx/x = du$:

$$I = \int \cos u \, du = \sin u = \sin (\ln x).$$

1.5 On pose $\ln x = u$, $\quad dx/x = du$:

$$I = \int \frac{du}{(1-u^2)^{1/2}} = \operatorname{Arc} \sin u = \operatorname{Arc} \sin (\ln x).$$

1.6 On pose $\cos 2x = u$, $\quad -2 \sin 2x dx = du$:

$$I = -\frac{1}{2} \int u^3 \, du = -\frac{1}{8} u^4 = -\frac{1}{8} \cos^4 2x.$$

Intégration par parties

1.7 $I = \displaystyle\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x \, dx$;

$x = u, \qquad du = dx$:

$\sin 2x \, dx = dv, \qquad v = -\dfrac{1}{2} \cos 2x$

$$2I = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$
$$I = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x.$$

1.8 $u = \ln x, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x:$

$x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, \qquad v = x^{n+1}/(n+1)$

$$I = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right).$$

1.9 $(\ln x)^2 = u, \qquad \mathrm{d}u = 2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

$x^4\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, \qquad v = x^5/5$

$$I = \frac{1}{5}x^5(\ln x)^2 - \frac{2}{5}\int x^4 \ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}x^5(\ln x)^2 - \frac{2}{25}x^5\ln x + \frac{2}{25}\int x^4\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^5}{5}\left[(\ln x)^2 - \frac{2}{5}\ln x + \frac{2}{25}\right].$$

1.10
$$I = -\frac{x^5}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}\int x^4\cos 2x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x^5}{2}\cos 2x + \frac{5x^4}{4}\sin 2x - \frac{20}{4}\int x^3\sin 2x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{x^5}{2}\cos 2x + \frac{5x^4}{4}\sin 2x + \frac{20x^3}{8}\cos 2x - \frac{60x^2}{16}\sin 2x -$$
$$-\frac{120x}{32}\cos 2x + \frac{120}{64}\sin 2x$$

$$= -\frac{x^5}{2}\cos 2x + \frac{5x^4}{4}\sin 2x + \frac{5x^3}{2}\cos 2x - \frac{15x^2}{4}\sin 2x -$$

$$-\frac{15x}{4}\cos 2x + \frac{15}{8}\sin 2x.$$

Fonctions rationnelles

1.11 $\dfrac{X+2}{X+1} = 1 + \dfrac{1}{X+1}.$

$$I = \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = x + \ln|x+1|.$$

1.12 $\dfrac{1}{-X^2-X+2} = \dfrac{1}{3(X+2)} - \dfrac{1}{3(X-1)}.$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|.$$

1.13 $\dfrac{X^2+X+1}{X^2-X-1} = 1 + \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(X - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - \dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\left(X - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}.$

$$I = x + \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ln\left|x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| - \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ln\left|x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|.$$

1.14 On pose $x^2 = u$, d'où $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{u+1},$$

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

1.15 On pose $u = x^2$, d'où $\mathrm{d}x/x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u/u)$ et

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|;$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}.$$

1.16 On pose $x^2+1=u$, d'où $2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ et

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\frac{1}{2u}+\frac{1}{4u^2}\,;$$

$$I=-\frac{2x^2+1}{4(x^2+1)^2}.$$

1.17 On emploie le même changement de variable :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)^2}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{1}{u}-\frac{1}{4u^2}\,;$$

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{4(x^2+1)^2}.$$

1.18 $\dfrac{X^2+2}{X^3-1}=\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X^2+X+1}.$

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+3/4}=\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

1.19 $(1+X^2)^2=4+8(X-1)+8(X-1)^2+4(X-1)^3+(X-1)^4.$

$$I=\int\left[\frac{4}{(x-1)^6}+\frac{8}{(x-1)^5}+\frac{8}{(x-1)^4}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{4}{5(x-1)^5}-\frac{2}{(x-1)^4}-\frac{8}{3(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

1.20 $\dfrac{2X^2-X+2}{2X-3}=X+1+\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{X-3/2}.$

$$I=\int(x+1)\,\mathrm{d}x+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3/2}=\frac{x^2}{2}+x+\frac{5}{2}\ln\left|x-\frac{3}{2}\right|.$$

1.21 $\dfrac{X^2}{X^4+X^2-2}=\dfrac{1}{3(X^2-1)}+\dfrac{2}{3(X^2+2)}.$

(Il est inutile de décomposer $1/(X^2-1)$ en éléments simples, car on est déjà ramené au tableau des primitives.)

$$I=-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

1.22 On pose $x^2 = u$, d'où $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u-2};$$

$$\frac{1}{X^2-X-2} = -\frac{1}{3(X+1)} + \frac{1}{3(X-2)}. \text{ D'où } I = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|.$$

$$I = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right|.$$

1.23 $$\frac{X^2}{(X^2+a^2)(X^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{X^2+b^2} - \frac{a^2}{X^2+a^2}\right).$$

$$I = \frac{1}{b^2-a^2}(b \text{ Arc tg } x/b - a \text{ Arc tg } x/a).$$

1.24 On pose $x^3 = u$, d'où $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$;

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+2)^3} = -\frac{4}{3}\frac{1}{(u+2)^2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{(x^3+2)^2}.$$

1.25 $$\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2-1} - \frac{1}{X^2+1}\right).$$

$$I = \int\left[\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x^2-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \text{Arc tg } x$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x^2+1)(x+1)}\right| - \text{Arc tg } x.$$

1.26 On pose $x^2 = u$, d'où

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|.$$

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$$

1.27 $$\frac{1+X}{X(1+X^2)} = -\frac{X}{1+X^2} + \frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{X}.$$

$$I = \int\left(-\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|x| + \text{Arc tg } x.$$

1.28 $\dfrac{X+1}{(X-1)^2} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$.

$$I = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) \mathrm{d}x = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}.$$

1.29 $\dfrac{X^4}{X^3-8} = X + \dfrac{4}{3(X-2)} + \dfrac{MX+N}{X^2+2X+4}$, $\qquad M = -4/3,\ N = 8/3$.

$$I = \int \left[x + \frac{4}{3(x-2)} - \frac{2(2x+2)}{3(x^2+2x+4)} + \frac{4}{(x+1)^2+3}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x^2+2x+4| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

1.30 $\dfrac{20X+17}{(2X+1)^2(3X+5)} = \dfrac{1}{2(X+1/2)^2} + \dfrac{1}{X+1/2} - \dfrac{1}{X+5/3}$.

$$I = -\frac{1}{2x+1} + \ln|x+1/2| - \ln|x+5/3|.$$

1.31 $\dfrac{3-X}{X^2+X^3} = \dfrac{4}{X+1} + \dfrac{3}{X^2} - \dfrac{4}{X}$.

$$I = \int \left[\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x}\right] \mathrm{d}x = 4\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x}.$$

1.32 $\dfrac{X^5}{(X^2-1)(X+1)} = X^2 - X + 2 + \dfrac{1}{2(X+1)^2} - \dfrac{9}{4(X+1)} + \dfrac{1}{4(X-1)}$.

$$I = \int \left[x^2 - x + 2 + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{9}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{9}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1|.$$

1.33 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2-12} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+5-\sqrt{12}}{x+5+\sqrt{12}}\right|$.

1.34 $\dfrac{2X^3-2X^2-2X+1}{X^2(X^2-2X+1)} = \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{2}{X-1}$.

$$I = \int \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x}.$$

1.35 $\dfrac{3X^2}{X^4+5X^2+4} = -\dfrac{1}{X^2+1}+\dfrac{4}{X^2+4}.$

$$I = \int\left(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x = -\mathrm{Arc\,tg}\,x+2\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{2}.$$

1.36 $\dfrac{X^2+X+1}{X^2-X+1} = 1+\dfrac{2X-1}{X^2-X+1}+\dfrac{1}{X^2-X+1}.$

$$I = \int\left[1+\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\right]\mathrm{d}x$$

$$= x+\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

1.37 $I = \dfrac{7}{2}\displaystyle\int\frac{2x+12}{x^2+12x+52}\mathrm{d}x-\int\frac{39}{(x+6)^2+16}\mathrm{d}x$

$$= \frac{7}{2}\ln|x^2+12x+52|-\frac{39}{4}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{x+6}{4}\right).$$

1.38 $I=I_1+I_2$, où

$$I_1 = \int\frac{2x^2+1}{(1+x^2)^2}x\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = 3\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Pour calculer I_1, on pose $x^2=t$:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}.$$

On calcule I_2 en intégrant $\int\mathrm{d}x/(x^2+1)$ par parties, avec $u=1/(x^2+1)$et $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}+\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

D'où

$$I_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\mathrm{Arc\,tg}\,x\right).$$

Finalement :

$$I = \ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,x+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}.$$

CHAPITRE 2

2.1 $I=\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $f(-x)\,\mathrm{d}(-x)=f(x)\,\mathrm{d}x$. On pose donc $\cos x=u$. D'où $\mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x$ et

$$I=-\int\frac{\mathrm{d}u}{a+bu}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a}{b}+u\right|=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a}{b}+\cos x\right|.$$

2.2 $I=\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $f(x+\pi)\,\mathrm{d}(x+\pi)=f(x)\,\mathrm{d}x$. On pose donc $\operatorname{tg} x=t$. D'où $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/(1+t^2)$ et

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{2(1+t)}-\int\frac{t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)+\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} t\,;$$

$$I=\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+x/2.$$

2.3 On pose $\operatorname{tg} x=t$. D'où

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}.$$

2.4 On pose $\sin x=u$. D'où

$$I=\int u^4(1-u^2)\,\mathrm{d}u=\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}.$$

2.5 Posons $t=\operatorname{tg} x/2$, $\alpha=\operatorname{tg}\theta/2$. Alors

$$\cos x-\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.\quad \text{D'où}$$

$$I=(1+\alpha^2)\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-\alpha^2}=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\ln\left|\frac{t+\alpha}{t-\alpha}\right|$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\ln\left|\frac{\sin(x+\theta)/2}{\sin(x-\theta)/2}\right|.$$

2.6 $$I=\int\frac{2\cos^2 x/2-1}{2\cos^2 x/2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{2\cos^2 x/2}\right)\mathrm{d}x=x-\operatorname{tg} x/2.$$

2.7 On pose $\operatorname{tg} x = t$. D'où

$$I = \int (1+1/t^2)^2\,\mathrm{d}t = \int (1+2/t^2+1/t^4)\,\mathrm{d}t = t-2/t-1/3t^3;$$

$$I = \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}.$$

2.8 $$I = \int \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \ln|\sin x|.$$

2.9 On pose $\operatorname{tg} x = t$. D'où

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{Arc\,tg}\frac{bt}{a} = \frac{1}{ab}\operatorname{Arc\,tg}\frac{b\operatorname{tg} x}{a}.$$

2.10 On pose $\cos x = u$. D'où $I = \displaystyle\int \frac{u^4}{u^2-1}\mathrm{d}u$. Or,

$$\frac{X^4}{X^2-1} = X^2+1+\frac{1}{X^2-1}.$$

$$I = \int \left(u^2+1+\frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}+u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|;$$

$$I = \frac{\cos^3 x}{3}+\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

2.11 On pose $\sin x = u$. D'où

$$I = \int \frac{1-u^2}{u^2}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{u}-u = -\frac{1}{\sin x}-\sin x.$$

2.12 On pose $\sin x = u$. D'où

$$I = \int \frac{1-u^2}{1-2u}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8(u-1/2)}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{4}+\frac{u}{4}-\frac{3}{8}\ln|u-1/2|.$$

$$I = \frac{1}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|\sin x-1/2|.$$

2.13 On pose $\operatorname{tg} x/2 = t$. D'où $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/(1+t^2)$ et

$$I = 2\int \frac{(1+t^2)}{(t^2-1)(t^2-3)}\mathrm{d}t.$$

Or, $$\frac{X^2+1}{(X^2-1)(X^2-3)} = -\frac{1}{X^2-1}+\frac{2}{X^2-3}.$$

$$I = 2\int\left(-\frac{1}{t^2-1}+\frac{2}{t^2-3}\right)dt = 2\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right|\right].$$

$$I = \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x/2+1}{\operatorname{tg} x/2-1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x/2+\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x/2-\sqrt{3}}\right|,$$

ou encore $I = \ln\left|\dfrac{\sin(x+\pi/4)}{\sin(x-\pi/4)}\right| - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sin(x+\pi/3)}{\sin(x-\pi/3)}\right|.$

2.14 On pose $\operatorname{tg} x/2 = t$. D'où $I = \displaystyle\int \frac{1-t^2}{4(t^2+1)(t^2+1/4)}\,dt.$

Or, $$\frac{1-X^2}{4(X^2+1)(X^2+1/4)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{X^2+1}+\frac{5}{12}\frac{1}{X^2+1/4}.$$

$$I = -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{5}{12}\int\frac{dt}{t^2+1/4} = -\frac{2}{3}\operatorname{Arc\,tg} t+\frac{5}{6}\operatorname{Arc\,tg} 2t.$$

$$I = -\frac{x}{3}+\frac{5}{6}\operatorname{Arc\,tg}(2\operatorname{tg} x/2).$$

2.15 $\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-(\sin^2 2x)/2.$ On pose $\operatorname{tg} 2x = t$. D'où

$$I = \int\frac{dt}{2(1+t^2)\,[1-t^2/2(1+t^2)]} = \int\frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}.$$

2.16 $\cos 2x = 2\cos^2 x-1.$

$$I = \int(2-1/\cos^2 x)\,dx = 2x-\operatorname{tg} x.$$

2.17 $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\cos 3x\,(\cos 3x+3\cos x)\,dx.$

$$\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2},\qquad \cos 3x\cos x = \frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}$$

$$I = \frac{1}{8}\int (1+3\cos 2x+3\cos 4x+\cos 6x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x\right).$$

2.18 Supposons par exemple $\cos x/2 \geqslant 0$; alors

$$I = \int (2\cos^2 x/2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int \cos x/2\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sin x/2\,.$$

2.19 On pose $\sin x = t^2$. D'où $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t/\sqrt{1-t^4}$

$$I = \int \frac{2t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t\,.$$

Or, $\dfrac{2X^2}{1-X^4} = \dfrac{1}{1-X^2} - \dfrac{1}{1+X^2}$.

Ainsi, $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \operatorname{Arc\,tg} t\,.$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(\sin x)^{1/2}}{1-(\sin x)^{1/2}} - \operatorname{Arc\,tg}(\sin x)^{1/2}.$$

2.20 $1+\cos 3x = 2\cos^2 3x/2$. D'où

$$I = 2\sqrt{2}\int \cos^3 3x/2\,\mathrm{d}x\,.$$

Or, $\cos^3 3x/2 = \frac{1}{4}(\cos 9x/2 + 3\cos 3x/2)$. Donc

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int (\cos 9x/2+3\cos 3x/2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{9}\sin 9x/2+\sin 3x/2\right).$$

2.21 On pose $\operatorname{tg} x/2 = t$. D'où

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,\dfrac{2t^2}{1+t^2}\right)^{1/2}} = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{|\,t\,|\,(1-t^2)^{1/2}}\,.$$

Supposons par exemple que $x \in [0, \pi/2]$. Alors $|\,t\,| = t$.

On pose $t = \sin u$, où $u \in [0, \pi/2]$. Il vient

$$I = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \sqrt{2}\ln|\operatorname{tg} u/2| = \sqrt{2}\ln|\operatorname{tg}\operatorname{Arc}\sin\operatorname{tg} x/2|.$$

2.22 On pose $\sin x = t$. D'où $I = \displaystyle\int \frac{(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{t^{1/3}}$.

On pose ensuite $t = u^3$.

$$I = \int \frac{3(1-u^6)^2\,u^2\,\mathrm{d}u}{u} = 3\left(\frac{u^{14}}{14} - \frac{u^8}{4} + \frac{u^2}{2}\right) = \frac{3}{(\sin x)^{1/3}}\left(\frac{\sin^5 x}{14} - \frac{\sin^3 x}{4} + \frac{\sin x}{2}\right).$$

2.23 On pose $\operatorname{ch} x = u$. D'où $\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et

$$I = \int (u^2-1)\,\mathrm{d}u = u^3/3 - u = \operatorname{ch} x\left(\frac{\operatorname{ch}^2 x}{3} - 1\right).$$

2.24
$$\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{th}^6 y \operatorname{ch}^7 y \frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{ch} y} = \int \operatorname{sh}^6 y\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^6 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{64}\int (e^{6y} - 6e^{4y} + 15e^{2y} - 20 + 15e^{-2y} - 6e^{-4y} + e^{-6y})\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{32}\int (\operatorname{ch} 6y - 6\operatorname{ch} 4y + 15\operatorname{ch} 2y - 20)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\operatorname{sh} 6y}{192} - \frac{3\operatorname{sh} 4y}{64} + \frac{15\operatorname{sh} 2y}{64} - \frac{5y}{8}.
\end{aligned}$$

2.25 La relation

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x\cos x$$

permet d'écrire I sous la forme

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x + \cos x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}.
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|.$$

Finalement, $I = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|.$

CHAPITRE 3

3.1 On pose $x-1=t$.

$$I = \int \mathrm{d}t/\sqrt{t} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x-1}.$$

3.2 On pose $1+x=u^2$. D'où $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$ et

$$I = \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2+1)\,u} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\,\mathrm{Arc\,tg}\,u\,.$$

$$I = 2\,\mathrm{Arc\,tg}\,(1+x)^{1/2}.$$

3.3 $X^2+16X+36=(X+8)^2-28$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{[(x+8)^2-28]^{1/2}} = \ln|(x+8)+(x^2+16x+36)^{1/2}|\,.$$

3.4 $$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x)^{1/2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1/2)^2-1/4]^{1/2}} = \ln|(x+1/2)+(x^2+x)^{1/2}|\,.$$

3.5 $I = \sqrt{3}\int (x^2+5/3)^{1/2}\,\mathrm{d}x$. On pose $x = \sqrt{5/3}\,\mathrm{sh}\,t$; d'où

$$\mathrm{d}x = \sqrt{5/3}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t, \qquad (x^2+5/3)^{1/2} = \sqrt{5/3}\,\mathrm{ch}\,t\,.$$

$$I = \sqrt{3}\,\frac{5}{3}\int \mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{5}{3}\left(t+\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}\right).$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{5}{3}\ln|\sqrt{3}\,x+(3x^2+5)^{1/2}| + \frac{x}{\sqrt{3}}(3x^2+5)^{1/2}\right].$$

3.6 $$I = \int \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} - \int \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Arc\,sin}\,x+(1-x^2)^{1/2}.$$

3.7 On pose $x=u^2+1$. D'où $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$ et

$$I = \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+u+1} = \int \frac{(2u+1)\,\mathrm{d}u}{u^2+u+1} + \int \frac{-\mathrm{d}u}{(u+1/2)^2+3/4}$$

$$= \ln(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\,.$$

$$I = \ln|x+(x-1)^{1/2}| - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2(x-1)^{1/2}+1}{\sqrt{3}}.$$

3.8 On pose $u=a^2+x^2$. D'où $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$ et

$$I=\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}uu^{1/2}=\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{3/2}.$$

3.9 On pose $u=x^2+2x$. D'où $\mathrm{d}u=2(x+1)\,\mathrm{d}x$ et

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^{1/2}}=u^{1/2}=(x^2+2x)^{1/2}.$$

3.10 On pose $x=\operatorname{sh}t$. D'où $\mathrm{d}x=\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t$ et

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t}=\operatorname{th}t=\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

3.11 On pose $x=u^2$. D'où $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$ et

$$I=\int\frac{2u\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)u}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|.$$

$$I=\ln\left|\frac{1+x^{1/2}}{1-x^{1/2}}\right|.$$

3.12 On pose $x=\sin t$. D'où $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$ et

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{1-\sin^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\operatorname{tg}t=x/(1-x^2)^{1/2}.$$

3.13 $-X^2-12X+8=44-(X+6)^2$. D'où

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{44-(x+6)^2}}=\operatorname{Arc}\sin\frac{x+6}{2\sqrt{11}}.$$

3.14 Le terme en $\mathrm{d}x/x^2$ conduit à poser $u=1/x$. Alors $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x/x^2$ et

$$I=\int\frac{-\mathrm{d}u}{(a^2+1/u^2)^{1/2}}=-\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{(a^2u^2+1)^{1/2}}=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2u^2)}{(a^2u^2+1)^{1/2}}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}(a^2u^2+1)^{1/2}$$

$$I=-\frac{(a^2+x^2)^{1/2}}{a^2x}.$$

3.15 On pose $x=u^3$. D'où $\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$ et

$$I=\int\frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{u^3+u}=\int\frac{3u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{3}{2}\ln(u^2+1)=\frac{3}{2}\ln(1+x^{2/3}).$$

3.16 On pose $x^3 = u$. D'où $3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+2)^{1/4}} = \frac{4}{9}(u+2)^{3/4} = \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}.$$

3.17 On pose $u = x^2+6x$. D'où $\mathrm{d}u = 2(x+3)\,\mathrm{d}x$ et

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}} = \frac{3}{4}u^{2/3} = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3}.$$

3.18 On décompose I en deux :

$$I_1 = \int \frac{4x-36}{(x^2-18x+106)^{1/2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int \frac{31}{(x^2-18x+106)^{1/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer I_1, on pose $u = x^2-18x+106$; ainsi

$$I_1 = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^{1/2}} = 4u^{1/2} = 4(x^2-18x+106)^{1/2}.$$

D'autre part,

$$I_2 = \int \frac{31\,\mathrm{d}x}{[(x-9)^2+25]^{1/2}} = 31\ln|x-9+(x^2-18x+106)^{1/2}|.$$

Finalement :

$$I = 4(x^2-18x+106)^{1/2}+31\ln|x-9+(x^2-18x+106)^{1/2}|.$$

3.19 On pose $\sqrt{3x+5} = u$, soit $x = (u^2-5)/3$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{3}u\,\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{2}{9}(u^2-5)u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\int (u^4-5u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{5u^3}{3}\right).$$

$$I = \frac{2}{9}(3x+5)^{3/2}\left(\frac{3x}{5}-\frac{2}{3}\right).$$

3.20 On pose $2x^3+9 = u$. D'où $6x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et

$$I = \frac{1}{6}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{9}u^{3/2} = \frac{1}{9}(2x^3+9)^{3/2}.$$

3.21 On pose $x-1 = 1/u$; d'où $\mathrm{d}x/(x-1) = -\,\mathrm{d}u/u$, $x = 1+1/u$ et

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{(1+1/u)^2+2(1+1/u)-3}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4u+1}} = -\sqrt{u+1/4}.$$

$$I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$$

3.22 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} = \ln|(x+2)+\sqrt{x^2+4x}|.$

3.23 On pose $u = x^4$; d'où $\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\frac{du}{u}$ et

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{1-u}}.$$

On pose ensuite $u = 1/v$; d'où $du/u = -dv/v$ et

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dv}{v\sqrt{1-1/v}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-v}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dv}{\sqrt{(v-1/2)^2-1/4}}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|v-1/2+\sqrt{v^2-v}| = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^4}-1}\right|.$$

3.24 On pose $u = x^3$. D'où $du = 3x^2\,dx$ et

$$I = \int \frac{du}{3(1-u^2)^{1/2}} = \frac{1}{3}\text{Arc sin}\, u = \frac{1}{3}\text{Arc sin}\, x^3.$$

3.25 Supposons $x > 0$; alors

$$I = \int \frac{\sqrt{1-1/x^2}}{x^3}\,dx.$$

En posant $u = 1/x^2$, on obtient

$$I = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-u}\,du = \frac{1}{3}(1-u)^{3/2}.$$

Finalement :

$$I = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3.$$

3.26 $X^2-6X+6 = (X-3)^2-3$. On pose $x-3 = \sqrt{3}\,\text{ch}\, t$. D'où $dx = \sqrt{3}\,\text{sh}\, t\, dt$ et

$$I = \int [2(3+\sqrt{3}\,\text{ch}\, t)^2-7(3+\sqrt{3}\,\text{ch}\, t)+10]\,dt$$

$$= \int (6\,\text{ch}^2 t+5\sqrt{3}\,\text{ch}\, t+7)\,dt = 3t+\frac{3}{2}\text{sh}\, 2t+5\sqrt{3}\,\text{sh}\, t+7t.$$

Finalement :

$$I = 10 \ln|x-3+(x^2-6x+6)^{1/2}|+(x+2)(x^2-6x+6)^{1/2}.$$

3.27 On pose $x=u^2$. D'où $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$ et

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{2+u} = 2\ln|u+2| = 2\ln|2+\sqrt{x}|.$$

3.28 On pose $u=x^{3/2}$. D'où $\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x$ et

$$I = \frac{2}{3}\ln|1+u| = \frac{2}{3}\ln|1+x^{3/2}|.$$

3.29 On pose $x=u^4$. D'où $\mathrm{d}x=4u^3\,\mathrm{d}u$ et

$$I = \int \frac{4u^3\,\mathrm{d}u}{u^2-u} = \int \frac{4u^2\,\mathrm{d}u}{u-1} = 4\int\left(u+1+\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$$
$$= 4(u^2/2+u+\ln|u-1|) = 4(x^{1/2}/2+x^{1/4}+\ln|x^{1/4}-1|).$$

3.30 On pose $(1+2x)^{1/3}=u$, soit $2x=u^3-1$, $\quad 2\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$;

$$I = \int\left(\frac{u^3-1}{2}\right)^2\frac{3}{2}u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{8}\int(u^7-2u^4+u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{8}\left(\frac{u^8}{8}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^2}{2}\right) = \frac{3}{320}(1+2x)^{2/3}(20x^2-12x+9).$$

3.31 On pose $(1+2x^3)^{1/2}=u$, $\quad$ soit $\quad 2x^3=u^2-1$, $\quad 6x^2\,\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$.

$$I = \frac{1}{3}\int u^2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\int(u^4-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right).$$

$$I = \frac{1}{45}(1+2x^3)^{3/2}(3x^3-1).$$

3.32 $\displaystyle I = \int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{[1-(x-1)^2]^{1/2}}.$

On pose $x-1=\sin u$. D'où $\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$, $(2x-x^2)^{1/2}=\cos u$ et

$$I = \int(1+\sin u)^2\,\mathrm{d}u = \int(1+2\sin u+\sin^2 u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int\left(\frac{3}{2}+2\sin u-\frac{\cos 2u}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{3}{2}u-2\cos u-\frac{\sin 2u}{4}.$$

$$I = \frac{3}{2}\operatorname{Arc}\sin(x-1)-\frac{1}{2}(2x-x^2)^{1/2}(x+3).$$

3.33 On pose $2x+1 = 1/u$. D'où $\mathrm{d}x/(2x+1) = -\mathrm{d}u/2u$ et

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\left[\frac{5}{4}\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+4\left(\frac{1}{u}-1\right)+3\right]^{1/2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+6u+5)^{1/2}}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{[(u+3)^2-4]^{1/2}} = -\ln|(u+3)+(u^2+6u+5)^{1/2}|.$$

$$I = -\ln\left|\frac{(6x+4)+2(5x^2+8x+3)^{1/2}}{2x+1}\right|.$$

3.34 On pose $u = 1+x^2$. D'où

$$I = \int u^{1/3}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}u^{4/3} = \frac{3}{4}(1+x^2)^{4/3}.$$

3.35 On pose $x = \operatorname{sh} t$. D'où $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$ et $I = \int \mathrm{d}t/\operatorname{sh}^4 t$. On pose alors $u = \coth t$. D'où

$$I = \int (1-u^2)\,\mathrm{d}u = u - u^3/3 = \frac{(1+x^2)^{1/2}}{x}\left(\frac{2x^2-1}{3x^2}\right).$$

3.36 $I = \displaystyle\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+4x^2)^{1/2}} + \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(1+4x^2)^{1/2}}$

$$= \frac{1}{2}(1+4x^2)^{1/2} + \frac{3}{2}\ln[2x+(1+4x^2)^{1/2}].$$

3.37 On pose $1-x^3 = u$. D'où $\mathrm{d}u = -3x^2\mathrm{d}x$ et

$$I = -\frac{1}{3}\int (1-u)\,u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}+\frac{2}{5}u^{5/2}\right)$$

$$= -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(3x^3+2).$$

3.38 On pose $t = x^5$. D'où $\dfrac{\mathrm{d}t}{t} = 5\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ et $I = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+t+1)^{1/2}}$.

On pose maintenant $t = 1/u$. D'où $\mathrm{d}t/t = -\mathrm{d}u/u$ et

$$I = -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+u+1)^{1/2}} = -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{[(u+1/2)^2+3/4]^{1/2}}$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|u+\frac{1}{2}+(u^2+u+1)^{1/2}\right|.$$

3.39 On pose $x = \sin t$. D'où $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

Or, $\sin^2 t \cos^2 t = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t = \dfrac{1-\cos 4t}{8}$. Donc

$$I = \int \frac{1-\cos 4t}{16}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\sin^2 2t \cos 2t\,\mathrm{d}t}{8} = \frac{t}{16} - \frac{\sin 4t}{64} - \frac{\sin^3 2t}{48}$$

$$= \frac{\operatorname{Arc}\sin x}{16} - \frac{x}{16}(1-2x^2)(1-x^2)^{1/2} - \frac{x^3}{6}(1-x^2)^{3/2}.$$

3.40 On pose $t = \mathrm{e}^x$. D'où $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$ et

$$I = \int (1-1/t^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int (t^2-1)^{1/2}/t^2\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors $t = \operatorname{ch} u$. D'où $\mathrm{d}t = \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u$ et

$$I = \int \operatorname{th}^2 u\,\mathrm{d}u = \int (\operatorname{th}^2 u - 1 + 1)\,\mathrm{d}u = u - \operatorname{th} u$$

$$= x + \ln[1+(1-\mathrm{e}^{-2x})^{1/2}] - (1-\mathrm{e}^{-2x})^{1/2}.$$

3.41 Posons $t = \mathrm{e}^x$; alors $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et

$$I = \int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+t+1}{t\sqrt{t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}.$$

Faisons apparaître au numérateur de la première intégrale la dérivée de t^2+t+1 :

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \sqrt{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\operatorname{sh}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

Dans la seconde intégrale, posons $u = 1/t$; alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{t} = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$ et, puisque $u = \mathrm{e}^{-x} > 0$,

$$K = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{u}+1}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}} = -\operatorname{Arg}\operatorname{sh}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$I = J + K = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\operatorname{sh}\frac{2\,\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{Arg}\operatorname{sh}\frac{2\,\mathrm{e}^{-x}+1}{\sqrt{3}}.$$

CHAPITRE 4

Développements limités

4.1 $$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^5)$$
$$= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 + o(x^5).$$

4.2 $$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + o(x^6)$$
$$= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{81}{80}x^6 + o(x^6).$$

4.3 $$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^6}{6!} +$$
$$+ \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^8}{8!} + o(x^8)$$
$$= 1+2x+2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 +$$
$$+ \frac{8}{315}x^7 + \frac{2}{315}x^8 + o(x^8).$$

4.4 $$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{3!} +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10}{243}x^4 + o(x^4).$$

4.5 $$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$
$$e^{\sin 3x} = 1 + 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{1}{2}\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^3 + o(x^3).$$

Comme $\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^2 = 9x^2 + o(x^3)$ et que $\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right)^3 = 27x^3 + o(x^3)$,

$$\exp(\sin 3x) = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^3).$$

4.6 On commence par développer $(\text{Arg sh } x)' = (1+x^2)^{-1/2}$ à l'ordre 5 :

$$(1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).$$

Intégrons :

$$\text{Arg sh } x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Remplaçons enfin x par $2x$:

$$\text{Arg sh } 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{12}{5}x^5 + o(x^6).$$

4.7 $f(x) = (1-x)(1+x)^{-1/2}$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$$

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} - \frac{11x^3}{16} + o(x^3).$$

4.8 Rappelons que

$$\text{Arc tg } a - \text{Arc tg } b = \text{Arc tg } \frac{a-b}{1+ab} \qquad \text{si} \quad ab > -1.$$

Donc

$$\text{Arc tg } \frac{a-x}{a+x} = \text{Arc tg } \frac{1-x/a}{1+x/a} = \text{Arc tg } 1 - \text{Arc tg } x/a \qquad \text{si} \quad x/a > -1.$$

Finalement :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^5}{5a^5} + o(x^6).$$

4.9 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u), \qquad \text{avec} \quad u = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^5).$$

D'où

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

4.10 On effectue la division de 1 par $1 - x^2/2 + x^4/24$ à l'ordre 5; on obtient

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

4.11 On effectue le produit des développements limités de e^x et de $1/1-x$:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3), \qquad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$

$$\frac{e^x}{1-x} = 1+2x+\frac{5x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}+o(x^3).$$

4.12 $$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3), \qquad \frac{1}{\cos x} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

4.13 $$(1+e^x)^{1/2} = \sqrt{2}\,[1+(e^x-1)/2]^{1/2}$$

$$\frac{e^x-1}{2} = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

$$(1+e^x)^{1/2} = \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{4}+\frac{3}{32}x^2+\frac{7}{384}x^3\right)+o(x^3).$$

4.14 $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3), \qquad \cos^p x = 1-\frac{p}{2}x^2+o(x^3).$$

4.15 $$\ln \operatorname{tg}(x+\pi/4) = \ln(1+\operatorname{tg} x)-\ln(1-\operatorname{tg} x)$$

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3), \qquad \ln(1+\operatorname{tg} x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\ln \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

4.16 $$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+o(x^6)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5\,040}+o(x^7)$$

$$e^x \sin x = x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}-\frac{x^7}{630}+o(x^7).$$

4.17

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x & f(2) &= \operatorname{tg} 2\\ f'(x) &= 1+\operatorname{tg}^2 x & f'(2) &= 1+\operatorname{tg}^2 2\\ f''(x) &= 2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x) & f''(2) &= 2\operatorname{tg} 2(1+\operatorname{tg}^2 2)\\ f'''(x) &= 2(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+3\operatorname{tg}^2 x) & f'''(2) &= 2(1+\operatorname{tg}^2 2)(1+3\operatorname{tg}^2 2)\end{aligned}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} 2+(x-2)(1+\operatorname{tg}^2 2)+(x-2)^2 \operatorname{tg} 2(1+\operatorname{tg}^2 2)+$$
$$+\frac{(x-2)^3}{3}(1+\operatorname{tg}^2 2)(1+3\operatorname{tg}^2 2)+o[(x-2)^3].$$

4.18 $f(x) = \ln(1+x) = \ln[2+(x-1)] = \ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)$

$$= \ln 2+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{24}+o[(x-1)^3].$$

4.19
$$\begin{array}{llll} f(x) & = x^5-2x^3+4x & f(-1) & = -3 \\ f'(x) & = 5x^4-6x^2+4 & f'(-1) & = 3 \\ f''(x) & = 20x^3-12x & f''(-1) & = -8 \\ f'''(x) & = 60x^2-12 & f'''(-1) & = 48 \end{array}$$
$$f(x) = -3+3(x+1)-4(x+1)^2+8(x+1)^3+o[(x+1)^3].$$

4.20
$$\begin{array}{llll} f(x) & = \operatorname{Arc\,tg} x & f(3) & = \operatorname{Arc\,tg} 3 \\ f'(x) & = 1/(1+x^2) & f'(3) & = 1/10 \\ f''(x) & = -2x/(1+x^2)^2 & f''(3) & = -3/50 \\ f'''(x) & = (6x^2-2)/(1+x^2)^3 & f'''(3) & = 13/250 \end{array}$$
$$f(x) = \operatorname{Arc\,tg} 3+\frac{1}{10}(x-3)-\frac{3}{100}(x-3)^2+\frac{13}{1\,500}(x-3)^3+o[(x-3)^3].$$

4.21 $f(x) = \dfrac{1}{2-(x+1)} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(x+1)+\dfrac{1}{8}(x+1)^2+\dfrac{1}{16}(x+1)^3+o[(x+1)^3].$

4.22 $\dfrac{x+1}{x-2} = 1+\dfrac{3}{x-2} = 1+\dfrac{3}{1+(x-3)}$

$$= 4-3(x-3)+3(x-3)^2-3(x-3)^3+o[(x-3)^3].$$

4.23 Les fonctions f et f', étant indéfiniment dérivables, admettent des développements limités à tout ordre, et le développement limité de f' à l'ordre 7 est la dérivée du développement limité de f à l'ordre 8.

Puisque f est impaire, son développement limité à l'ordre 8 s'écrit sous la forme

$$A(x) = a_1 x+a_3 x^3+a_5 x^5+a_7 x^7.$$

D'où

$$A'(x) = a_1+3a_3 x^2+5a_5 x^4+7a_7 x^6.$$

Il vient en reportant dans l'équation différentielle

$$a_1+3a_3 x^2+5a_5 x^4+7a_7 x^6-1-x^2(a_1+a_3 x^2+a_5 x^4+a_7 x^6)^2 \in \mathcal{N}_8.$$

Nous obtenons par identification

$$a_1-1=0, \quad 3a_3-a_1^2=0, \quad 5a_5-2a_1a_3=0, \quad 7a_7-a_3^2-2a_1a_5=0.$$

Nous retrouvons ainsi

$$a_1=1, \quad a_3=1/3, \quad a_5=2/15 \quad \text{et} \quad a_7=17/315.$$

4.24 On vérifie aisément que la fonction f est paire; écrivons-la sous la forme $f(x)=\mathrm{e}^u$, où

$$u=-\cot 2x \ln \operatorname{tg}(x+\pi/4).$$

Introduisons la variable auxiliaire $t=\operatorname{tg} x$; alors $t\sim x$ et

$$u=\frac{t^2-1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{t^2-1}{2t}[\ln(1+t)-\ln(1-t)].$$

Compte tenu de la présence de t au dénominateur, il convient d'introduire les développements limités de $\ln(1+t)$ et de $\ln(1-t)$ à l'ordre 6; ainsi,

$$u=\frac{t^2-1}{2t}\left[2t+\frac{2}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5+o(t^6)\right]=(t^2-1)\left[1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+o(t^5)\right],$$

soit

$$u=-1+\frac{2}{3}t^2+\frac{2}{15}t^4+o(t^5).$$

Il vient en reportant

$$\mathrm{e}^u=\frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^v+o(t^5),$$

où

$$v=\frac{2}{3}t^2+\frac{2}{15}t^4.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\mathrm{e}^v=1+\frac{2}{3}t^2+\frac{16}{45}t^4+o(t^5).$$

Enfin, la relation

$$t=\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

conduit à

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\mathrm{e}}\left[1+\frac{2}{3}x^2+\left(\frac{4}{9}+\frac{16}{45}\right)x^4\right]+o(x^5) \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{5}x^4\right)+o(x^5). \end{aligned}$$

4.25 Rappelons que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. D'où

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

En prenant les développements limités de $\cos x$ et de $\cos 3x$, nous obtenons

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + \cdots + (-1)^p \frac{3}{4}(1+3^{2p-1})\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots + o(x^n),$$

où $2p$ prend toutes les valeurs paires inférieures à n.

4.26 $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{Arg\,th} x = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + \ldots\right) + o(x^n).$

4.27 $(1-x)^{1/3} = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{5}{81}x^3 + \ldots +$

$$+(-1)^n \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n).$$

4.28 $x e^{-x} = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n).$

4.29 $f(x) = \dfrac{1+3x^2}{(1-x)^3} = \dfrac{4}{(1-x)^3} - \dfrac{6}{(1-x)^2} + \dfrac{3}{1-x}.$

Or,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + o(x^n)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + \ldots + (n+1)(n+2)x^n + o(x^n).$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + 3x + \ldots + (2n^2+1)x^n + o(x^n).$$

4.30 $\sin x \cos 2x = \dfrac{1}{2}\sin 3x - \dfrac{1}{2}\sin x$

$$= x - \frac{13}{6}x^3 + \ldots + (-1)^p \frac{3^{2p+1}-1}{2(2p+1)!}x^{2p+1} + \ldots + o(x^n),$$

où $2p+1$ prend toutes les valeurs impaires inférieures à n.

Parties principales

4.31 $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^3)$ $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$
$\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3/2.$

4.32 $2 \sin x - \sin 2x - x^3 \sim -x^5/4.$

4.33 $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ $1 - \cos x = x^2/2 + o(x^3)$
$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ $y \sim 2x^3/3.$

4.34 $1 - \cos x = x^2/2 - x^4/24 + o(x^4),$ $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$
$\sin^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4),$ $y \sim x^4/8.$

4.35 $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ $\dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{x}{1+x/2} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$
$y \sim x^3/12.$

4.36 $x \cos x^{1/2} = x - x^2/2 + x^3/24 + o(x^3)$ $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3),$
$y \sim -7x^3/24.$

4.37 $\operatorname{ch} x^{1/2} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{x^3}{720} + o(x^3),$

$$\frac{1+5x/12}{1-x/12} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{288} + o(x^3) \qquad y \sim -x^3/480.$$

4.38 En développant tous les termes jusqu'à l'ordre 7, on trouve

$$y = \left(1 - \frac{4}{15} + \frac{1}{15} - \frac{4}{5}\right)x + \left(\frac{2}{45} + \frac{1}{45} - \frac{1}{15}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{450} + \frac{2}{225} - \frac{1}{150}\right)x^5 +$$
$$+ \frac{1}{15}\left(\frac{1}{1\,260} + \frac{17}{315} - \frac{17}{1\,680}\right)x^7 + o(x^7)$$

$y \sim x^7/336.$

CHAPITRE 5

5.1 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Le dénominateur étant x^3, on cherche le développement limité du numérateur à l'ordre 3 :

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3), \qquad x - \sin x \sim x^3/6, \qquad y \to 1/6.$$

5.2 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = \frac{\ln \cos x}{x}, \qquad \cos x = 1 + o(x), \qquad \ln \cos x = o(x)$$

$$\frac{\ln \cos x}{x} = o(1), \qquad \ln y \to 0, \qquad y \to 1.$$

5.3 $(27)^{1/3} = 3$ et $(16)^{1/4} = 2$. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$(x+27)^{1/3} - 3 = 3[(1+x/27)^{1/3} - 1] \sim x/27$,
$(x+16)^{1/4} - 2 = 2[(1+x/16)^{1/4} - 1] \sim x/32$,
$y \to 32/27$.

5.4 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$2(1+x)^{1/3} - (4+x)^{1/2} = 2[(1+x)^{1/3} - (1+x/4)^{1/2}] \sim 5x/12$,
$(9+x)^{1/2} - 3 = 3[(1+x/9)^{1/2} - 1] \sim x/6$,
$y \to 5/2$.

5.5 Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$$1 - \cos x \sim x^2/2, \qquad \ln(1-\cos x) \sim 2 \ln x, \qquad y \to 2.$$

5.6 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$1 - \cos 3x \sim 9x^2/2 \qquad x(1-\cos 3x) \sim 9x^3/2.$$

On cherche donc le développement limité du numérateur à l'ordre 3 :

$2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 2x + 2x^3/3 - 2x - 8x^3/3 + o(x^3)$, $\quad 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x \sim -2x^3$,
$y \to -4/9$.

5.7 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$y = \exp(\sin x)\,\frac{\exp(x - \sin x) - 1}{x - \sin x}.$$

Or, $\exp(\sin x) \sim 1$ et $\exp(x-\sin x)-1 \sim x-\sin x$.
Donc $y \to 1$.

5.8 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\cos ax - 1 \sim -a^2x^2/2, \quad \ln \cos ax \sim -a^2x^2/2.$$

De même, $\ln \cos bx \sim -b^2x^2/2$.

$$y \to a^2/b^2.$$

5.9 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$\sin^2 x \sim x^2$, $\cos x = 1-x^2/2+o(x^2)$, $\cos 2x = 1-2x^2+o(x^2)$,
$(\cos 2x)^{1/2} = 1-x^2+o(x^2)$, $\cos x-(\cos 2x)^{1/2} \sim x^2/2$,
$y \to 1/2$.

5.10 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$x^2 \operatorname{tg} ax \sim ax^3$, $\operatorname{tg} ax = ax+a^3x^3/3+o(x^3)$, $\operatorname{tg} ax - ax \sim a^3x^3/3$
$y \to a^2/3$.

5.11 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 3x \sim 3x$, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$,
$\sin 5x - \operatorname{tg} 3x \sim 2x$, $\sin 3x - \operatorname{tg} 2x \sim x$;
$y \to 2$.

5.12 Forme indéterminée 0^0.

$$\ln y = \frac{\ln x}{\ln 3x} = \frac{\ln x}{\ln 3 + \ln x}, \quad \ln 3 + \ln x \sim \ln x, \quad \ln y \to 1$$

$y \to \mathrm{e}$.

5.13 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$\sin^3 x \sim x^3$, $\operatorname{tg} x = x+x^3/3+o(x^3)$, $\sin x = x-x^3/6+o(x^3)$,
$\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3/2$,
$y \to 1/2$.

5.14 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$x \operatorname{Arc\,tg} x \sim x^2$, $x - \operatorname{Arc\,tg} x = o(x^2)$, $y = o(1)$, $y \to 0$.

5.15 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. $\sin x = x + o(x)$, $1 - \cos x = o(x)$,

$1 + \sin x - \cos x \sim x$. De même, $1 + \sin px - \cos px \sim px$.

$y \to 1/p$.

5.16 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}, \qquad a^x = \exp(x \ln a) = 1 + x\ln a + o(x)$$

$$b^x = 1 + x\ln b + o(x),$$

$$\frac{a^x+b^x}{2} = 1 + x\,\frac{\ln a + \ln b}{2} + o(x) = 1 + x\ln\sqrt{ab} + o(x),$$

$$\ln\frac{a^x+b^x}{2} \sim x\ln\sqrt{ab}, \qquad \ln y \to \ln\sqrt{ab}, \qquad y \to \sqrt{ab}.$$

5.17 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = \frac{\ln(1+a\operatorname{tg} x)}{x}, \qquad a\operatorname{tg} x \sim ax, \qquad \ln(1+a\operatorname{tg} x) \sim ax,$$

$$\ln y \to a, \qquad y \to e^a.$$

5.18 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$y = \frac{\exp(x\ln a) - \exp(x\ln b)}{\exp(x\ln c) - \exp(x\ln d)} = \frac{\exp(x\ln b)}{\exp(x\ln d)}\,\frac{\exp(x\ln a/b) - 1}{\exp(x\ln c/d) - 1}$$

$$\exp(x\ln a/b) - 1 \sim x\ln a/b, \qquad \exp(x\ln c/d) - 1 \sim x\ln c/d$$

$$y \to \frac{\ln a/b}{\ln c/d}.$$

5.19 Forme indéterminée 0^0.

$$\ln y = \operatorname{tg}^2 x \ln\sin x \sim x^2\ln x, \qquad \ln y \to 0, \qquad y \to 1.$$

5.20 Le numérateur et le dénominateur se présentent sous la forme indéterminée 0^0.

$$\ln y = x^{1/2}\ln x - \frac{x}{2}\ln x \to 0, \qquad y \to 1.$$

5.21 Forme indéterminée $0 \times \infty$.

$$y = x\ln(1+1/x), \qquad \ln(1+1/x) \sim 1/x, \qquad y \to 1.$$

5.22 Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Au voisinage de $+\infty$,

$$1+e^x \sim e^x, \qquad \ln(1+e^x) \sim \ln e^x = x, \qquad y \to 1.$$

5.23 Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$$y = \frac{\ln(x+1)}{2x}, \quad \ln(x+1) \sim \ln x.$$

La fonction logarithme étant négligeable devant la fonction puissance, $y \to 0$.

5.24 Forme indéterminée ∞^0.

$$\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\frac{\ln x}{x} \to 0, \quad y \to 1.$$

5.25 Forme indéterminée ∞^0.

$$\ln y = \frac{\ln(e^x+x)}{x}, \qquad e^x+x \sim e^x, \qquad \ln(e^x+x) \sim \ln e^x = x,$$

$$\ln y \to 1, \quad y \to e.$$

5.26 Chacun des termes se présente sous la forme $0 \times \infty$.

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x} = \frac{x}{2} + o(1)$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad \ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$x^3 \ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{x}{2} + o(1)$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + o(1), \qquad y \to 0.$$

5.27 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = x \ln\frac{x-1}{x+1} = x\ln(1-1/x) - x\ln(1+1/x) \to -2, \qquad y \to e^{-2}.$$

5.28 Forme indéterminée $\infty - \infty$.

$$y = \frac{x^2-(x^2-1)}{x+(x^2-1)^{1/2}} = \frac{1}{x+(x^2-1)^{1/2}} \sim \frac{1}{2x}, \qquad y \to 0.$$

5.29 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = x^2 \ln \cos \frac{2}{x}, \qquad \ln \cos \frac{2}{x} \sim \cos \frac{2}{x} - 1 \sim -\frac{2}{x^2},$$

$$\ln y \to -2, \qquad y \to e^{-2}.$$

5.30 Forme indéterminée $\infty - \infty$ et 1^∞.

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

$$ex^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = e\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) + o(1)$$

$$\ln(1+1/x)^x = x \ln(1+1/x) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(1+1/x)^x = e\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y = ex^2\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} - 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}\right) + o(1), \qquad y \to e/8.$$

5.31 Forme indéterminée ∞^0.

$$\ln y = (1-x) \ln \operatorname{Arg\,th} x, \qquad \operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \sim -\frac{1}{2} \ln(1-x)$$

Posons $t = 1 - x$. Alors

$$\ln y \sim t \ln\left(\frac{1}{2} \ln t\right).$$

Or, $\ln\left(\frac{1}{2} \ln t\right) = \ln(\ln t) - \ln 2.$

Lorsque x tend vers 1, $t \ln 2$ tend vers 0. D'autre part,

$$t \ln(\ln t) = (t \ln t) \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}.$$

Lorsque t tend vers 0, il en est de même de $t \ln t$ et de $\dfrac{\ln(\ln t)}{\ln t}$. Ainsi, $\ln y \to 0$ et $y \to 1$.

5.32 Forme indéterminée $\infty-\infty$.

$$y = -\frac{(2x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(1+x)(x^2+x+1)} = -\frac{2x+1}{(1+x)(x^2+x+1)}, \qquad y \to -1/2.$$

5.33 Forme indéterminée 1^∞.

$$\ln y = \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln x - \ln 1}{1-x};$$

$\ln y$ tend vers l'opposé de la dérivée de $\ln x$ au point 1 : $\ln y \to -1$, $y \to 1/e$.

5.34 Forme indéterminée $\infty-\infty$. Posons $t = x-1$.

$$y = \frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x} = \frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}\ t\ln(1+t) \sim t^2,$$

$$(1+t)\ln(1+t)-t = (1+t)(t-t^2/2)-t+o(t^2) = t^2/2+o(t^2) \qquad y \to 1/2.$$

5.35 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons $t = x-1$.

$$\sin\frac{\pi}{2}(1+t) = \cos\frac{\pi}{2}t, \qquad \cos\frac{\pi}{2}t-1 \sim -\pi^2t^2/8,$$

$$\ln\cos\frac{\pi}{2}t \sim -\pi^2t^2/8,$$

$$y \to -\pi^2/8.$$

5.36 Forme indéterminée $0\times\infty$. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \frac{\sin \pi x/2}{\cos \pi x/2} \sim \frac{1}{\cos \pi x/2}$.

$$\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x), \qquad y \to -2/\pi.$$

5.37 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons $t = \ln x$.

$$y = \frac{\exp(\ln a \ln x)-x}{\ln x} = \frac{\exp(t\ln a)-\exp t}{t}$$

$$\exp(t\ln a)-\exp t = \exp t\,[\exp(\ln a-1)t-1] \sim (\ln a-1)t$$

$$y \to \ln a - 1.$$

5.38 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$y = -\frac{1-x^\alpha}{1-x}\,\frac{x-1}{\ln x-\ln 1}, \qquad \frac{x^\alpha-1}{x-1} \to \alpha, \qquad \frac{\ln x-\ln 1}{x-1} \to 1, \qquad y \to -\alpha.$$

5.39 Forme indéterminée 0^0. Posons $t = \cos x$.

$$y = t^t, \qquad \ln y = t \ln t \to 0, \qquad y \to 1.$$

5.40 Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+2\cos x)^{1/2}$. Alors

$$y = \frac{f(x)-f(\pi/2)}{x-\pi/2} \to f'(\pi/2).$$

Or, $$f'(x) = -\frac{\sin x}{(1+2\cos x)^{1/2}}.$$ Donc $y \to -1$.

5.41 Forme non indéterminée. La limite est la valeur au point $\pi/2$, à savoir π.

5.42 Forme indéterminée 1^∞. Posons $u = x - \pi/2$.

$$\ln y = \operatorname{tg} x \ln(\pi/x - 1) = -\frac{1}{\operatorname{tg} u} \ln \frac{\pi/2-u}{\pi/2+u}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} u} [\ln(1-2u/\pi) - \ln(1+2u/\pi)]$$

$$\ln y \to 4/\pi, \qquad y \to e^{4/\pi}.$$

5.43 Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \frac{x-\pi/6}{\sin x - \sin \pi/6}.$$

Le premier facteur tend vers 0, le second vers l'inverse de la dérivée de $\sin x$ au point $\pi/6$. Donc $y \to 0$.

5.44 Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

$$y = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Arc} \sin x + \pi/4}{x + 1/\sqrt{2}} \frac{\operatorname{Arc} \sin x - \pi/4}{x - 1/\sqrt{2}}.$$

Le dernier facteur tend vers la dérivée de $\operatorname{Arc} \sin x$ au point $1/\sqrt{2}$; le premier facteur n'est pas indéterminé.

$$y \to \pi/4.$$

5.45 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$y = \frac{\sin x + \sin a}{x+a} \, \frac{\sin x - \sin a}{x-a}.$$

Le deuxième facteur tend vers la dérivée de $\sin x$ au point a; le premier facteur n'est pas indéterminé.

$$y \to \frac{\sin 2a}{2a}.$$

5.46 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons $t = x-a$.

$$y = \frac{-t + a\ln(1+t/a)}{a-(a^2-t^2)^{1/2}}, \qquad -t+a\ln(1+t/a) = -t + a\left(\frac{t}{a} - \frac{t^2}{2a^2}\right) + o(t^2)$$

$$a-(a^2-t^2)^{1/2} = \frac{t^2}{a+(a^2-t^2)^{1/2}} \sim \frac{t^2}{2a}, \qquad y \to -1.$$

CHAPITRE 6

Calculs d'intégrales impropres

6.1 L'intégrale est convergente, car $(9-x^2)^{-1/2} \asymp (3-x)^{-1/2}$ au voisinage de 3.

$$I = [\operatorname{Arc} \sin x/3]_0^3 = \operatorname{Arc} \sin 1 - \operatorname{Arc} \sin 0 = \pi/2.$$

6.2 L'exposant de $2-x$ étant égal à 1, l'intégrale est divergente.

6.3 L'exposant de $x-1$ étant supérieur à 1, l'intégrale est divergente.

6.4 L'intégrale est convergente, car $1/(x^2-1) \sim 1/x^2$ au voisinage de $+\infty$.

$$I = -\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_3^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

6.5 L'intégrale est divergente, car $1/x(1+x) \sim 1/x$ au voisinage de 0. Il est donc inutile de faire l'étude au voisinage de $+\infty$.

6.6 L'intégrale est convergente, car $x/(1-x^2)^{-1/2} \sim (1-x)^{-1/2}$ au voisinage de 1. La fonction à intégrer est la dérivée de $-(1-x^2)^{1/2}$. Donc

$$I = -[\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1.$$

6.7 L'intégrale est convergente, car l'exposant de $x-1$ est strictement inférieur à 1.

$$I = \frac{3}{2}[(x-1)^{2/3}]_0^4 = \frac{3}{2}(9^{1/3}-1).$$

6.8 L'intégrale est convergente, car $1/x(1+x^2) \sim 1/x^3$ au voisinage de $+\infty$. Posons $t = x^2$; il vient

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

6.9 L'intégrale est convergente, car $1/(1+x)^2 \sim 1/x^2$ au voisinage de $+\infty$.

$$I = -\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

6.10 L'intégrale est convergente, car $1/x^2(1+x) \sim 1/x^3$ au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{1}{X^2(1+X)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}.$$

$$I = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[-\frac{1}{x}+\ln\frac{x+1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1-\ln 2.$$

6.11 L'intégrale est convergente, car $1/(1+x^2)^2 \sim 1/x^4$ au voisinage de $+\infty$. En intégrant par parties $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$, on trouve

$$I = \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right]_0^{+\infty} = \pi/4.$$

6.12 L'intégrale est convergente, car $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \asymp (1+x)^{-1/2}$ au voisinage de -1.

L'intégrale se décompose en la différence de deux intégrales convergentes :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{1/2}}$$

$$= [\operatorname{Arc\,sin} x]_{-1}^{1} + [(1-x^2)^{1/2}]_{-1}^{1} = \pi.$$

6.13 Remarquons que

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} \sim 2e^{-x} \qquad \text{au voisinage de } +\infty$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} \sim 2e^{x} \qquad \text{au voisinage de } -\infty.$$

L'intégrale est donc convergente. D'après le tableau des primitives,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{Arc\,tg} e^x.$$

D'où

$$I = \pi.$$

6.14 La fonction à intégrer étant équivalente à $1/x^3$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est convergente. Posons $t = x^2$; l'intégrale devient

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+a^2)(t+b^2)} = \frac{1}{2(b^2-a^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+a^2} - \frac{1}{t+b^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[\ln\frac{t+a^2}{t+b^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}.$$

6.15 La fonction à intégrer étant équivalente à $1/x^4$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est convergente.

$$\frac{1}{(1+X)(4+X)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+4}\right).$$

D'où

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\,[\text{Arc tg}\,x - \frac{1}{2}\text{Arc tg}\,x/2]_0^{+\infty} = \pi/12.$$

6.16 La fonction à intégrer n'est pas définie lorsque $x = 2$. On décompose l'intégrale en deux :

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} + \int_2^{10} \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}.$$

Comme l'exposant de $x-2$ est strictement inférieur à 1, ces deux intégrales sont convergentes. On obtient ainsi

$$I = \frac{3}{2}\,[(x-2)^{2/3}]_1^2 + \frac{3}{2}\,[(x-2)^{2/3}]_2^{10} = 9/2.$$

6.17 La fonction à intégrer étant équivalente à $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, l'intégrale est convergente.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \text{Arc tg}\,(x+1).$$

D'où

$$I = \pi.$$

6.18 $\displaystyle\int_0^x \text{tg}\,t\,dt = -\ln\cos x.$

Puisque $\cos x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pi/2$, $-\ln\cos x$ tend vers $+\infty$, et l'intégrale est divergente.

6.19 La fonction à intégrer étant semblable à $(1-x)^{-1/2}$ au voisinage de 1, l'intégrale est convergente. En posant $x = \sin t$, on se ramène à une intégrale de Wallis :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 t\,dt = \frac{4\times 2}{5\times 3} = \frac{8}{15}.$$

6.20 L'intégrale est convergente, puisque $1/(1+x^2)^4 \sim 1/x^8$ au voisinage de $+\infty$. En posant $x = \text{tg}\,t$, on obtient

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^6 t\,dt = \frac{5\times 3\times 1}{6\times 4\times 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

6.21 Au voisinage de 1, la fonction à intégrer est semblable à $(1-x)^{-1/2}$; l'intégrale est donc convergente. Posons $x = \sin t$; nous obtenons

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{4-\sin^2 t}.$$

Posons ensuite tg $t = u$; il vient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{4+3u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\text{Arc tg}\frac{u\sqrt{3}}{2}\right]_0^{+\infty} = \pi/4\sqrt{3}.$$

6.22 La fonction à intégrer étant semblable à e^{-4x} au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est convergente. Le dénominateur s'écrit :

$$(\text{ch}^2 x)^2 + (\text{ch}^2 x - 1)^2 = \tfrac{1}{4}(\text{ch}\, 2x+1)^2 + \tfrac{1}{4}(\text{ch}\, 2x-1)^2 = \tfrac{1}{2}(\text{ch}^2\, 2x+1).$$

Posons $t = 2x$; l'intégrale devient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2 t+1}.$$

Posons maintenant $u = \text{th}\, t$; alors $\text{ch}^2\, t = 1/1-u^2$, $dt = du/(1-u^2)$ et

$$I = \int_0^1 \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Comme $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}+1)^2$,

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

6.23 La fonction à intégrer n'est pas définie au point 1. Il faut donc étudier chacune des intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Comme l'exposant de $x-1$ est supérieur à 1, ces deux intégrales sont divergentes.

6.24 La fonction à intégrer étant semblable à $1/\sqrt{1-x}$ au voisinage de 1 et à $1/\sqrt{1+x}$ au voisinage de -1, l'intégrale est convergente. Posons $t = 1/(2+x)$; alors $dt/t = -dx/(2+x)$. L'intégrale devient

$$I = \int_{1/3}^1 \frac{dt}{(-3t^2+4t-1)^{1/2}} = \int_{1/3}^1 \frac{dt}{\sqrt{3}[1/9-(t-2/3)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}[\text{Arc}\sin(3t-2)]_{1/3}^1 = \pi/\sqrt{3}.$$

6.25 La fonction à intégrer étant équivalente à $1/\sqrt{1-x}$ au voisinage de 1, l'intégrale est convergente. On peut poser $t = \sqrt{x/(1-x)}$, ou encore $x = \sin^2 u$; alors :

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du = \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2u)\, du = \pi/2.$$

6.26 La fonction à intégrer n'est pas définie au point $x = 1$, mais on peut la prolonger par continuité, car

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

On pose $f(1) = 1/3$. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim 1/x^2$; l'intégrale est donc convergente.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.27 Rappelons que

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1).$$

Comme $x \ln x$ tend vers 0 avec x, l'intégrale est convergente, et

$$I = [x(\ln x - 1)]_0^1 = -1.$$

6.28 Comme $(\ln x)/x^2$ est négligeable devant $1/x^{3/2}$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est convergente. Intégrons par parties :

$$I = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

6.29 Comme $\operatorname{Arc\,tg} 1/x \sim 1/x$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est divergente.

6.30 Comme $(\operatorname{Arc\,tg} x)/x^2 \sim 1/x$ au voisinage de 0, l'intégrale est divergente. Il est donc inutile de faire l'étude aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

6.31 La fonction à intégrer étant négligeable devant $1/x^{5/2}$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est convergente. On fait le changement de variable $t = x^2$, puis on intègre par parties :

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\left[\frac{\ln t}{t+1}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{4}.$$

6.32 Cet exercice est analogue au précédent. On pose cette fois $t = x^3$. D'où

$$I = (\ln 2)/9.$$

6.33 Au voisinage de 1, la fonction à intégrer est équivalente à $1/2\sqrt{2}\sqrt{1-x}$; l'intégrale est donc convergente. Posons $x = \sin t$; l'intégrale devient :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2\cos t + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2+\cos t}.$$

Les changements de t en $-t$, t en $t+\pi$ et t en $\pi - t$ ne laissant pas l'élément différentiel invariant, posons $u = \operatorname{tg} t/2$; il vient :

$$I = \int_0^1 \frac{2\,du}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,[\operatorname{Arc\,tg} u/\sqrt{3}]_0^1 = \pi/3\sqrt{3}.$$

6.34 La fonction à intégrer étant dominée par e^{-x} au voisinage de $+\infty$, l'intégrale est absolument convergente, et donc convergente. Rappelons que l'on obtient une primitive de $e^{-x}\sin x$ en calculant la partie imaginaire de

$$\int e^{-x}e^{jx}\,dx = \int e^{(j-1)x}\,dx = \frac{1}{j-1}\,e^{(j-1)x} = -\frac{1+j}{2}\,e^{-x}(\cos x + j\sin x).$$

D'où $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{2}(-\cos x - \sin x)\right]_0^{+\infty} = 1/2.$$

6.35 On calcule cette fois la partie réelle de $\int \exp[(j-1)x]\,dx$. D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{2}(-\cos x + \sin x)\right]_0^{+\infty} = 1/2.$$

6.36 Cet exercice est analogue à l'exercice 6.17. On trouve cette fois :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{x+1}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{2}\right).$$

6.37 La fonction à intégrer étant semblable à $(1+x)^{-1/2}$ au voisinage de -1, l'intégrale est convergente. On pose $t = (1+x)^{1/2}$; alors $x = -1+t^2$, $dx = 2t\,dt$ et

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t(t^2+9)}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\,[\operatorname{Arc\,tg} t/3]_0^{\sqrt{3}} = \pi/9.$$

6.38 La fonction à intégrer étant négligeable devant toute puissance de x au voisinage de $-\infty$, l'intégrale est convergente.

$$I = \int_{-\infty}^0 x^2 e^x \sin x\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^0 x^2 e^{(1+j)x}\,dx.$$

Or, une primitive de $x^2 e^{(1+j)x}$ est de la forme $(ax^2+bx+c)\,e^{(1+j)x}$. En dérivant, nous obtenons :

$$(1+j)ax^2 + [2a+(1+j)b]x + b + (1+j)c = x^2.$$

D'où par identification

$$a = \frac{1}{1+\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{j}}{2} \qquad b = -\frac{2a}{1+\mathrm{j}} = \mathrm{j} \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{b}{1+\mathrm{j}} = -\frac{1+\mathrm{j}}{2}.$$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1+\mathrm{j}}{2}\left[\mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1+\mathrm{j}}{2}$$

et $I = -1/2$.

6.39 Comme $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^3} \sim \dfrac{1}{x^6}$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, l'intégrale est convergente.

Effectuons le changement de variable $t = x + \dfrac{1}{2}$. L'intégrale devient :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3}.$$

Nous sommes ainsi amené à calculer

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^n}.$$

Intégrons par parties, en posant $u = \left(t^2 + \dfrac{3}{4}\right)^{-n}$ et $v = t$. Nous obtenons aisément la relation de récurrence

$$I_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n} I_n.$$

Par ailleurs,

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $I_3 = I_2 = \dfrac{4}{3} I_1 = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

6.40 Au voisinage de 0, $\ln(\operatorname{tg} x) \sim \ln x$. Lorsque x tend vers $\pi/2$, $\cos x \ln(\sin x)$ et $\cos x \ln(\cos x)$ tendent vers 0. L'intégrale est donc convergente.

Posons $y = \sin x$; alors $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$ et

$$I = \int_0^1 \ln \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \ln y\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+y)\,\mathrm{d}y$$

$$= [y(\ln y - 1)]_0^1 - 1/2[(y+1)(\ln(y+1)-1)]_0^1 - 1/2[(1-y)(\ln(1-y)-1)]_0^1$$

$$= -1-(\ln 2-1)-1/2+1/2 = -\ln 2.$$

Convergence des intégrales

6.41 La relation $|\sin x \sin 1/x| \leqslant |\sin x|$ montre que $\sin x \sin 1/x$ tend vers 0 si $x \to 0$. Une intégration par parties montre que, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \sin t \sin \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \left[- \cos t \sin \frac{1}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t^2} \cos t \cos \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t .$$

Puisque $\left| \frac{1}{t^2} \cos t \cos \frac{1}{t} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, la dernière intégrale a une limite lorsque $x \to +\infty$. D'autre part, la relation $\left| \cos x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant \left| \sin \frac{1}{x} \right|$ montre que $\cos x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 si $x \to +\infty$. L'intégrale donnée est donc convergente.

6.42 Lorsque x tend vers 0, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1. Une intégration par parties montre que, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \left[- \frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t .$$

Puisque $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, et donc convergente. Puisque $\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. L'intégrale donnée est donc convergente.

6.43 En effectuant le changement de variable $x \mapsto 1/x$, on se ramène à l'exercice précédent. L'intégrale donnée est donc convergente.

6.44 La relation $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \sim x^{2-\alpha}$ au voisinage de 0 montre que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 3$. Puisque $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos 2t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t .$$

Comme dans l'exercice 6.42, on montre à l'aide d'une intégration par parties que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$ converge. D'autre part, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En résumé, l'intégrale donnée converge si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

6.45 La relation $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$ montre que $\ln \sin \frac{1}{x} \sim -\ln x$. L'intégrale donnée est donc divergente.

6.46 Soit c un élément de $]2/\pi, +\infty[$. La relation $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ au voisinage de 0 implique $\ln \cos \frac{1}{x} \sim -\frac{1}{2x^2}$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\int_c^{+\infty} \ln \cos \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc convergente. Pour étudier la convergence de l'intégrale $\int_{2/\pi}^{c} \ln \cos \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, effectuons le changement de variable $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$. L'intégrale devient

$$\int_0^{c'} \frac{\ln \sin u}{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^2}\,\mathrm{d}u\,, \quad \text{où} \quad c' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{c}.$$

La relation $\sin u \sim u$ au voisinage de 0 montre que $\frac{\ln \sin u}{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^2} \asymp \ln u$; l'intégrale est donc convergente, et il en est de même de l'intégrale donnée.

CHAPITRE 7

Convergence des séries

7.1 $u_n \sim 1/n^2$. La série est convergente.

7.2 On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n^2} \to 0.$$

La série est convergente.

7.3 $u_n \sim 1/n$. La série est divergente.

7.4 $u_n \asymp 1/\sqrt{n}$. La série est divergente.

7.5 On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

La série est convergente.

7.6 $u_n = (-1)^n \sin \pi\, a/n$. La série est alternée dès que n est supérieur à $2a$. La condition suffisante de convergence des séries alternées s'applique.

7.7 Si $|a| \leqslant 1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série est divergente. Si $|a| > 1$, $u_n \sim v_n = n/a^n$. Comme dans l'exercice 7.5, on montre que la série de terme général (v_n) est absolument convergente. La série proposée est donc absolument convergente.

7.8 $u_n \sim n^2/n!$. D'après l'exercice 7.2, la série est convergente.

7.9 $u_n \asymp 1/n^{3/2}$. Comme $3/2 > 1$, la série est convergente.

7.10 Si $|x| < 1$, $x^n \to 0$ et $u_n \sim x^n$. La série géométrique de raison x étant absolument convergente, il en est de même de la série donnée.

Si $|x| > 1$, la conclusion précédente reste valable, car x et $1/x$ ont des rôles symétriques.

Si $|x| = 1$, alors $|u_n| = 1/2$. Ainsi, u_n ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

7.11 $u_n \sim e^{-n+1}$. La série de terme général (e^{-n+1}) est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, donc convergente. La série proposée est aussi convergente.

7.12 Appliquons la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln n} \to 0.$$

La série est donc convergente.

7.13 Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(2n-1)\,2n(2n+1)}\,\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n^2(2n+1)} \to 0.$$

La série est convergente.

7.14 $u_n \sim 1/n^2$. La série est convergente.

7.15 On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3}\,\frac{1}{n+2} \to 0.$$

La série est convergente.

7.16 $u_n \sim 1/n$. La série est divergente.

7.17 On applique la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |\sin(a+b/n)| \to |\sin a|.$$

Si a n'est pas de la forme $(2k+1)\pi/2$, $|\sin a| < 1$ et la série est absolument convergente. Dans le cas contraire, u_n ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

7.18 $$u_n \leqslant \frac{n \ln n}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!} = \frac{\ln n}{n-1}\,\frac{1}{(n-2)!}, \qquad \text{d'où} \quad u_n = o\left(\frac{1}{(n-2)!}\right).$$

La série de terme général $(1/(n-2)!)$ étant convergente, il en est de même de la série donnée.

7.19 $$\begin{aligned} u_n &= \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{1!+2!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!} \\ &< \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{(n-1)\,(n-1)!}{(n+2)!} \\ &< \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Il en découle que la série est convergente.

7.20 $u_n = \exp\,[(n+1/n)\ln(1+1/n)] - \mathrm{e} = \mathrm{e}\,\{\exp\,[(n+1/n)\ln(1+1/n)-1]-1\}$. D'où $u_n \sim \mathrm{e}[(n+1/n)\ln(1+1/n)-1]$. En remplaçant $\ln(1+1/n)$ par son développement limité à l'ordre 2, on trouve que $u_n \sim -\mathrm{e}/2n$. La série est donc divergente.

7.21 $u_n = \exp[n \ln(1+1/n^2)] - 1 \sim n \ln(1+1/n^2) \sim 1/n$. La série est divergente.

7.22 $u_n = \exp[n^2 \ln\ (n \sin 1/n)] - e^{-1/6}$.

$$n \sin 1/n = 1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} + o(1/n^4).$$

$$\ln(n \sin 1/n) = -\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{72n^4} + o(1/n^4)$$

$$= -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{180n^4} + o(1/n^4).$$

$u_n \sim -\dfrac{e^{-1/6}}{180n^2}$. La série est convergente.

7.23 $\ln \dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1} = \ln(1+2/n) - \ln(1-1/n+1/n^2) \sim 3/n$. Donc

$u_n \sim v_n$, où $v_n = (-1)^n\, 3/n$.

La série de terme général (v_n) est convergente. Cependant, la série donnée étant alternée, il faut encore étudier la série dont le terme général (w_n) est défini par

$$w_n = u_n - v_n = (-1)^n \left[\ln \frac{n(n+2)}{n^2-n+1} - \frac{3}{n} \right].$$

Or,

$$\ln(1+2/n) - \ln(1-1/n+1/n^2) - 3/n \sim -5/2n^2.$$

La série de terme général (w_n) est absolument convergente. La série donnée, somme de deux séries convergentes, est aussi convergente (mais elle n'est pas absolument convergente; elle est seulement semi-convergente).

7.24 $u_n = (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n)$; notons que $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Or, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ décroît et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il en est de même de $\sin \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. La règle de convergence des séries alternées permet de conclure.

7.25 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$. On introduit

$$w_n = u_n - v_n = (-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = -\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{n}.$$

La série de terme général (w_n) est divergente; il en est de même de la série donnée.

7.26 $u_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} \to 1$.

Comme u_n ne tend pas vers 0, la série est divergente.

7.27 On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x+n}{(n+1)^{n+1}}n^n = \frac{x+n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{x+n}{n+1}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Comme la limite est strictement inférieure à 1, la série est convergente.

7.28 $u_n = \ln\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{1+\mathrm{e}^{-2n}} = \ln(1-\mathrm{e}^{-2n}) - \ln(1+\mathrm{e}^{-2n}) \sim -2\mathrm{e}^{-2n}$.

La série de terme général $(-2\mathrm{e}^{-2n})$ est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 (à savoir e^{-2}); elle est donc convergente. Il en est de même de la série donnée.

7.29 $\cos\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\qquad \ln\cos\dfrac{1}{n} \sim -\dfrac{1}{2n^2}$,

$\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, $\qquad \ln\sin\dfrac{1}{n} \sim -\ln n$.

Donc $u_n \sim (\ln n)/2n^2$. La série de terme général $((\ln n)/n^2)$ est convergente, car

$$\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série donnée est donc convergente.

7.30 $\ln u_n = n^\alpha \ln\cos\dfrac{1}{n} \sim -\dfrac{1}{2n^2}n^\alpha = -\dfrac{n^{\alpha-2}}{2}$.

Le terme général tend vers 0 si et seulement si $\ln u_n$ tend vers $-\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 2$.

On applique la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = (\cos 1/n)^{n^{\alpha-1}}.$$

Si $\alpha - 1 > 2$, c'est-à-dire si $\alpha > 3$, $\sqrt{u_n} \to 0$, et la série est convergente. Si $\alpha = 3$, $\sqrt{u_n} \to 1/\sqrt{e}$, et la série est convergente. Si $\alpha < 3$, la règle de Cauchy ne permet pas de conclure. On emploie alors la règle de Riemann, en cherchant la limite de $n^\beta u_n$:

$$\ln(n^\beta u_n) = \beta \ln n + n^\alpha \ln \cos \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2} n^{\alpha-2}.$$

La limite est $-\infty$, quel que soit β. En choisissant $\beta > 1$, on voit que la série est convergente.

Calculs de sommes de séries

7.31 $u_n = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{(n+2)-(n+1)}{1+(n+1)(n+2)} = \operatorname{Arc\,tg}(n+2) - \operatorname{Arc\,tg}(n+1).$

Donc

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \operatorname{Arc\,tg}(n+2) - \operatorname{Arc\,tg} 1 .$$

La série est convergente, et sa somme est $\pi/4$.

7.32 On prouve la convergence à l'aide de la règle de D'Alembert, comme dans les exercices 7.2 et 7.15. Rappelons que le nombre e a été introduit au tome 1 comme la limite de la suite de terme général $1 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} + \cdots + \dfrac{1}{n\,!}$. Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Or,

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+1)(n+2)(n+3) - 15n^2 - 22n - 11 \\ &= 2(n+1)(n+2)(n+3) - 15(n+2)(n+3) + 53n + 79 \\ &= 2(n+1)(n+2)(n+3) - 15(n+2)(n+3) + 53(n+3) - 80. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \right) \\ &= 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80(e-5/2) \\ &= 109 - 40e. \end{aligned}$$

7.33 $u_n \sim 2/n^2$. La série est donc convergente. Écrivons u_n sous la forme

$$u_n = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln n-\ln(n+3).$$

On voit ainsi que

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \ln 3+\ln(n+1)-\ln(n+3) = \ln 3+\ln\frac{n+1}{n+3}.$$

La somme de la série est $\ln 3$.

7.34 La série est convergente, car $u_n \sim 1/n^3$.

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}.$$

D'où

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

La somme de la série est $1/4$.

7.35 Cet exercice se traite comme le précédent : $u_n \sim 1/n^3$.

$$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{1}{3X} - \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{6(X+3)}.$$

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right).$$

La somme de la série est $7/36$.

7.36 $$\cot x - 2\cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

D'où

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2^n} = \cot\frac{1}{2^n} - 2\cot\frac{1}{2^{n-1}}$$

et

$$u_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par suite :

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{1}{2^n}\cot\frac{1}{2^n} - 2\cot 2.$$

La série est convergente, et sa somme est $1-2\cot 2$.

CHAPITRE 8

Rayons de convergence

8.1 On applique la règle de Cauchy à la série des modules :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left|\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|^{1/n} = \left|\frac{x}{n}\right| \to 0.$$

La série est absolument convergente pour tout nombre réel x. Donc $R = +\infty$.

8.2 $\sqrt[n]{|u_n|} = (1+1/n)|x| \to |x|$. Si $|x| < 1$, la série converge; si $|x| > 1$, la série diverge. Donc $R = 1$. Si $|x| = 1$,

$$|u_n| = (1+1/n)^n \to \mathrm{e} \neq 0.$$

La série est alors divergente.

8.3 Cette série a le même rayon de convergence que la série de terme général $(n(n+1)x^{n-1})$. Cette dernière est la dérivée seconde de la série géométrique de terme général (x^{n+1}). Ainsi, $R = 1$. Lorsque $|x| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

8.4 Puisque $\sqrt[n]{n^2} \to 1$, la règle de Cauchy montre que $R = 1$. Lorsque $|x| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

8.5 $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\left|\dfrac{x}{n}\right|$. Puisque $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{|u_n|} \to 0$. Donc $R = +\infty$.

8.6 Cette série a le même rayon de convergence que la série géométrique de terme général $((x/2)^n)$. Donc $R = 2$. Lorsque $|x| = 2$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

8.7 On applique la règle de D'Alembert à la série des modules :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |x| \to |x|.$$

Le rayon de convergence est 1. Pour $|x| = 1$, $|u_n| = 1/(2n)^2$. La série est convergente si $x = 1$, et absolument convergente si $x = -1$.

8.8 Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1}\,\frac{|x|}{3} \to \frac{|x|}{3}.$$

Donc $R = 3$. Si $x = 3$, on reconnaît la série harmonique (divergente); si $x = -3$, on reconnaît la série harmonique alternée (convergente).

8.9 On reconnaît la série dérivée de la série de terme général $(x^{n+1}/4^n)$. Donc $R=4$. Si $|x|=4$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge.

8.10 Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{|x|}{2} \to \frac{|x|}{2}.$$

Donc $R=2$. Si $x=2$, on trouve une série de Riemann convergente; si $x=-2$, la série est absolument convergente.

8.11 Remarquons que $u_n \sim x^n/n$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|.$$

La règle de D'Alembert montre que $R=1$. Lorsque $x=1$, $u_n \sim 1/n$, et la série est divergente. Si $x=-1$,

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n} \sim -\frac{1}{n^3}.$$

La série est la somme de la série harmonique alternée et d'une série convergente; elle est donc convergente.

8.12 En appliquant la règle de D'Alembert, on trouve $R=2$. Si $x=2$, $u_n = 1/(2n-1) \sim 1/2n$, et la série est divergente. Si $x=-2$, $u_n=(-1)^n/(2n-1)$; la condition suffisante de convergence des séries alternées s'applique, et montre que la série est semi-convergente.

8.13 $u_n \sim \dfrac{x^n}{(n-1)!} = x\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Comme la série de terme général $(x^{n-1}/(n-1)!)$ est absolument convergente pour tout nombre réel x, il en est de même de la série proposée; donc $R=+\infty$.

8.14 Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}|x| \to |x|.$$

Donc $R=1$. Si $x=1$, $u_n > 1/n$, et la série est divergente. Si $x=-1$, $u_n=(-1)^n(\ln n)/n$; comme $u_n \to 0$ et que $|u_n|$ décroît si $n \geqslant 3$, la série est semi-convergente.

8.15 $u_n \sim x^{n-1}$. La série proposée est absolument convergente si et seulement si $|x|<1$; donc $R=1$. Si $|x|=1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série est divergente.

8.16 Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}|x| \to 4|x|.$$

Donc $R = 1/4$. Si $|x| = 1/4$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 par valeurs inférieures. Lorsque $x = -1/4$, la condition suffisante de convergence des séries alternées s'applique. Lorsque $x = 1/4$, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure. (On démontre de manière non élémentaire que la série est divergente.)

Sommes de séries entières

8.17 On trouve aisément $R = 1$. Comme $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, nous voyons que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x]$$

$$= (1-x)\ln(1-x) + x.$$

8.18 $u_n \sim x^n/n^3$; d'où $R = 1$. Pour calculer la somme, on décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-2)(X-1)X}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(X-2)(X-1)X} = \frac{1}{2(X-2)} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{2X}$$

D'où

$$\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{x^2}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{n-2} - x\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)\ln(1-x) + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}.$$

8.19 On trouve aisément $R = 1$. Dérivons, pour faire disparaître les dénominateurs ; nous obtenons la série géométrique de terme général (x^{4n-2}). Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^{4n-2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{4n-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\operatorname{Arg\,th} x - \operatorname{Arc\,tg} x).$$

8.20 On déduit de la règle de D'Alembert que $R=1$. Pour faire disparaître les dénominateurs, dérivons trois fois de suite :

$$s'''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

Il reste à intégrer trois fois de suite :

$$s''(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} = \frac{1}{2}(\operatorname{Arg\,th} x + \operatorname{Arc\,tg} x)$$

$$s'(x) = \int_0^x \left[\frac{1}{4}\ln(1+t) - \frac{1}{4}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} t\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}(1+x)\ln(1+x) + \frac{1}{4}(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}x \operatorname{Arc\,tg} x$$

$$s(x) = \frac{1}{8}(1+x)^2\ln(1+x) - \frac{1}{8}(1-x)^2\ln(1-x) - \frac{1}{4}x\ln(1+x^2) -$$

$$- \frac{1}{4}(1-x^2)\operatorname{Arc\,tg} x.$$

8.21 On trouve encore $R=1$. Pour calculer la somme, on décompose la fraction rationnelle $X/(X+1)(X+2)$ en éléments simples :

$$\frac{X}{(X+1)(X+2)} = \frac{2}{X+2} - \frac{1}{X+1}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{2}{x^2}[-\ln(1+x)+x] - \frac{1}{x}\ln(1+x) = -\frac{x+2}{x^2}\ln(1+x) + \frac{2}{x}.$$

8.22 La règle de D'Alembert montre que $R=+\infty$. Pour calculer la somme, remarquons que

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(\omega x)^p}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(\omega^2 x)^p}{p!}\right),$$

où $$\omega = \frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$s = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{\omega x} + e^{\omega^2 x}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left[e^x + e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + j\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - j\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

8.23 Si $\alpha \in \mathbf{N}$, u_n est nul dès que $n \geqslant \alpha$, et $R = +\infty$. Si $\alpha \notin \mathbf{N}$, la règle de D'Alembert montre que $R = 1$. La somme de la série entière est :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \alpha x\left[1 + 2(\alpha-1)x + \cdots + \frac{n+1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)x^n + \cdots\right]$$
$$= \alpha x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x + (\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1} + \cdots\right].$$

Ainsi, $\quad s(x) = \alpha x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x(1+x)^{\alpha-1}\right] = \alpha x(1+\alpha x)(1+x)^{\alpha-2}$.

8.24 Rappelons que $(1+x)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p x^p$. Dérivons deux fois :

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1} \qquad n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{p=2}^{n} p(p-1)x^{p-2}.$$

Remplaçons x par 1 et ajoutons membre à membre :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p = n\,2^{n-1} + n(n-1)\,2^{n-2} = n(n+1)\,2^{n-2}.$$

D'après la règle de D'Alembert, $R = 1/2$. Pour tout réel $x \in]-1/2, 1/2[$, posons $t = 2x$, afin de reconnaître un développement classique :

$$u_n(x) = \frac{n(n+1)}{4}t^n = \frac{t}{4}\frac{\mathrm{d}^2 t^{n+1}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^{n+1} = \dfrac{t}{1-t}$. Par suite, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^{n+1} = \dfrac{2}{(1-t)^3}$. Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{t}{2(1-t)^3} = \frac{x}{(1-2x)^3}.$$

Développements en série entière

8.25 $\quad f(x) = \dfrac{1}{3(1+x/3)} = \dfrac{1}{3}\left(1 - x/3 + (x/3)^2 + \ldots + (-1)^n (x/3)^n + \ldots\right) \quad R = 1.$

8.26 Rappelons que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. D'où

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

En développant en série entière $\cos x$ puis $\cos 3x$, nous obtenons :

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{3}{4}(1+3^{2n-1})\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad R = +\infty.$$

8.27 $$f(x) = \ln 4 + \ln\left|1 + \frac{x}{4}\right|$$

$$= 2\ln 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n + \ldots \qquad R = 4.$$

8.28 $$f(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3} = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{6}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x}.$$

Or,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

D'où en dérivant :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

et

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + \ldots + (n+1)(n+2)x^n + \ldots$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + 3x + \cdots + (2n^2+1)x^n + \cdots \qquad R = 1.$$

8.29 $$\frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{1}{x-\omega^2} + \frac{1}{x-\omega} = -\frac{\omega}{1-\omega x} - \frac{\omega^2}{1-\omega^2 x}$$

$$= -\omega(1 + \omega x + \omega^2 x^2 + \ldots + \omega^n x^n + \ldots)$$

$$-\omega^2(1 + \omega^2 x + \omega^4 x^2 + \ldots + \omega^{2n} x^n + \ldots)$$

$$= 1 + x - 2x^2 + \ldots + x^{3p} + x^{3p+1} - 2x^{3p+2} + \ldots \qquad R = 1.$$

8.30 Remarquons que $f(x)$ est la partie réelle de

$$\exp(x\cos\alpha)\exp(\mathrm{j}x\sin\alpha) = \exp(x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}).$$

Donc

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(1+x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}+\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\alpha}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha}+\ldots\right)$$

$$= 1+x\cos\alpha+\frac{x^2}{2}\cos 2\alpha+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha+\ldots \qquad R=+\infty.$$

8.31 Remarquons que

$$\cos(1+\mathrm{j})x = \mathrm{ch}\, x\cos x-\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\, x\sin x.$$

Donc

$$\mathrm{ch}\, x\cos x = \mathrm{Re}\,[\cos(1+\mathrm{j})x].$$

Or,

$$\cos(1+\mathrm{j})x = 1-\frac{(1+\mathrm{j})^2}{2!}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{(1+\mathrm{j})^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$$

et

$$(1+\mathrm{j})^{2n} = 2^n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4})^{2n} = 2^n\mathrm{e}^{n\mathrm{j}\pi/2}.$$

D'où

$$\mathrm{ch}\, x\cos x = 1-\frac{1}{6}x^4+\frac{2^4}{8!}x^8+\ldots+(-1)^p\frac{2^{2p}}{(4p)!}x^{4p}+\ldots \qquad R=+\infty.$$

8.32 On peut remarquer que

$$f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$$

et intégrer le développement de l'exercice 8.29. On peut aussi écrire :

$$\ln(1+x+x^2) = \ln\frac{1+x^3}{1-x} = \ln(1-x^3)-\ln(1-x).$$

Il suffit de développer $\ln(1-x)$ en série entière, puis de remplacer x par x^3. On obtient :

$$\ln(1+x+x^2) = x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{3p+1}}{3p+1}+\frac{x^{3p+2}}{3p+2}-2\frac{x^{3p+3}}{3p+3}+\ldots \qquad R=1.$$

8.33 La dérivée est $f'(x) = 1+\ln(1+x)$. D'où :

$$f'(x) = 1+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}, \quad R=1.$$

On intègre terme à terme, en remarquant que $f(0) = 0$:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}, \quad R = 1 .$$

8.34 La dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1}{(1-x)^2 \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui montre au passage que $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arc} \sin x$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad R = 1 .$$

On intègre terme à terme, en tenant compte de $f(0) = \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad R = 1 .$$

CHAPITRE 9

9.1 Pour tout nombre réel $x, f(x+\pi) = -f(x)$. Il n'y a donc pas d'harmonique de rang pair.

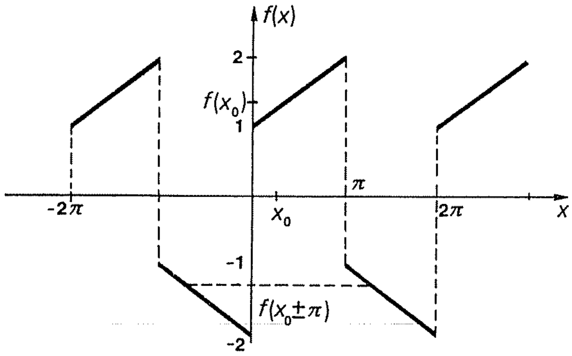


FIG. 1

$$A_{2p+1} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos(2p+1)x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{x}{\pi}\cos(2p+1)x\,dx\right].$$

Or,

$$\int x\cos(2p+1)x\,dx = \frac{x\sin(2p+1)x}{2p+1} - \int\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}\,dx$$

$$= \frac{x\sin(2p+1)x}{2p+1} + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

D'où $A_{2p+1} = -4/(2p+1)^2\pi^2$. De même, $B_{2p+1} = 6/(2p+1)\pi$. Finalement,

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \frac{6}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}.$$

On aurait pu aussi remarquer que f est la somme d'un signal en dents de scie triangulaires, d'un signal rectangulaire et d'un signal constant égal à $-1/2$, et appliquer les résultats des n^{os} 9.7 et 9.9 (avec $E = -3/2$).

9.2 $$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}.$$

9.3 $$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}\right).$$

9.4 $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

9.5 $f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{11}\cos 11x + \dots\right).$

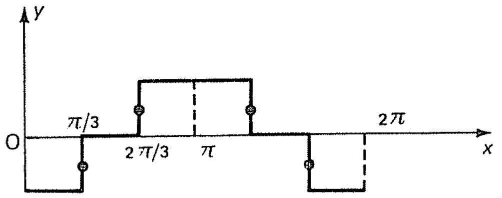


FIG. 2

9.6 $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{25}\sin 5x + \frac{1}{49}\sin 7x + \dots\right).$

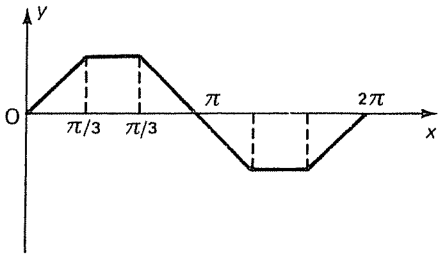


FIG. 3

9.7 $f(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi}\left(\frac{1}{p} + 2p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx\right).$

9.8 La fonction f est impaire, donc $A_n = 0$.

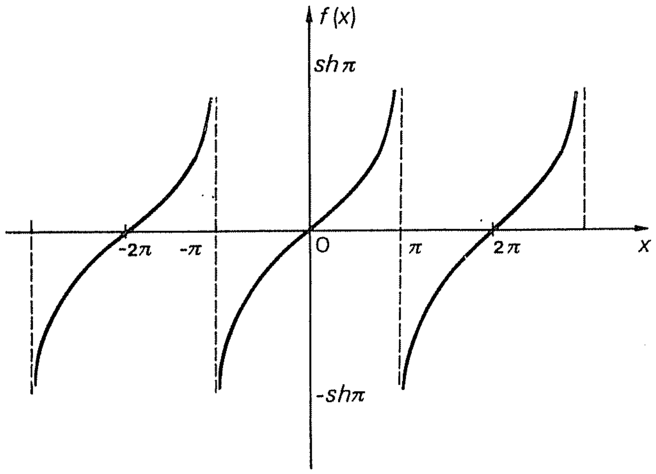


FIG. 4

$$C_n = (-1)^n \mathrm{j}\, \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \frac{n}{1+n^2}, \qquad B_n = (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \frac{n}{1+n^2}$$

$$S(x) = -\frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2} \sin nx .$$

$S(\pi) = 0 \neq f(\pi)$. La fonction f n'est pas continue au point π, mais

$$S(\pi) = \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}.$$

9.9

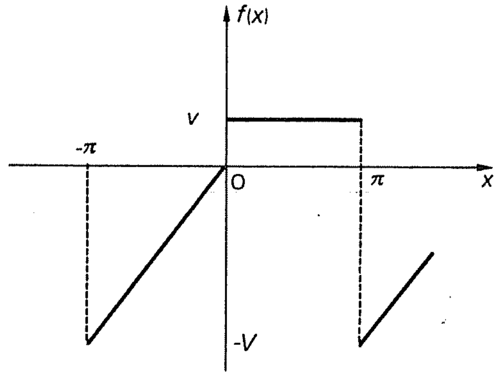


FIG. 5

$$A_0 = \frac{v}{2} - \frac{V}{4},\ A_{2p} = 0,\ A_{2p+1} = \frac{2V}{(2p+1)^2 \pi^2},\ B_{2p} = -\frac{V}{n\pi},\ B_{2p+1} = \frac{2v+V}{n\pi}.$$

$$A_3 = \frac{20v}{9\pi^2}, \qquad B_3 = \frac{4v}{\pi}, \qquad Y_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2} = \frac{2v}{\pi} \sqrt{\frac{100}{81\pi^2} + 4} \approx \frac{4v}{\pi}.$$

9.10 a)

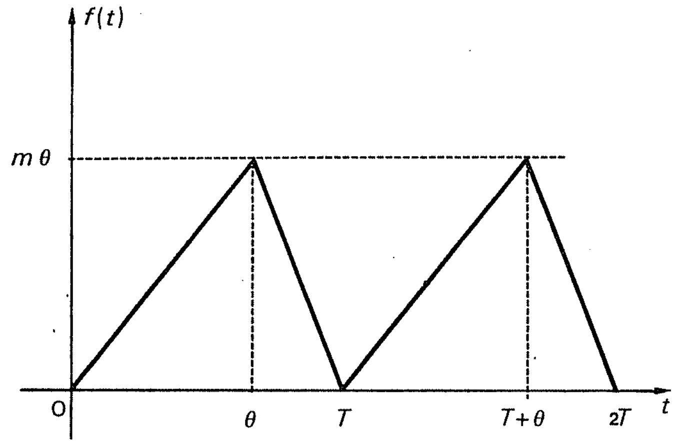


FIG. 6

b) $\quad A_0 = \dfrac{m\theta}{2}, \qquad A_n = \dfrac{2m}{n^2\omega^2(T-\theta)}(\cos n\omega\theta - 1)$

$$B_n = \frac{2m}{n^2\omega^2(T-\theta)}\sin n\omega\theta\,.$$

Si $n \neq 0$, $\quad C_n = \dfrac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}B_n) = \dfrac{m}{n^2\omega^2(T-\theta)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\theta} - 1)\,.$

c) Pour tout nombre réel x,

$$\cos x - \mathrm{j}\sin x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2} - 2\mathrm{j}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = -2\mathrm{j}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x/2}.$$

D'où

$$|\cos x - \mathrm{j}\sin x - 1| = 2|\sin x/2|$$

et

$$|C_n| = \frac{2m}{n^2\omega^2(T-\theta)}|\sin n\omega\theta/2|\,.$$

d) $A_2 = B_2 = 0$.

9.11 a)

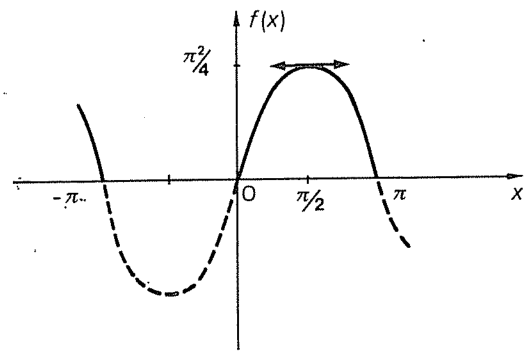


FIG. 7

b) Comme f est impaire, $A_0 = A_n = 0$.

$$B_n = \frac{4}{\pi n^3}[1-(-1)^n], \qquad B_{2p} = 0, \qquad B_{2p+1} = \frac{8}{\pi(2p+1)^3}.$$

$$S(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}.$$

c) La fonction f satisfait aux hypothèses du théorème de Lejeune-Dirichlet. Donc $S=f$. En particulier, $S(\pi/2)=f(\pi/2)$. Or,

$$S(\pi/2) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \qquad \text{et} \qquad f(\pi/2)=\pi^2/4.$$

9.12 a)

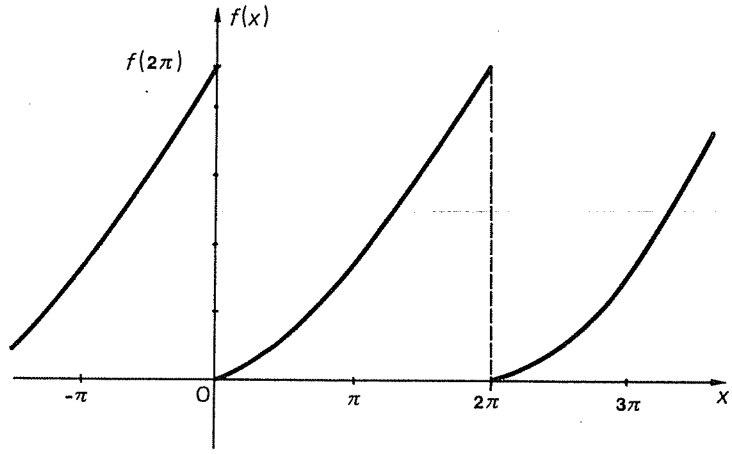


FIG. 8

b) $\quad A_0 = 4\pi^2/3+\pi, \qquad A_n = 4/n^2, \qquad B_n = -(4\pi+2)/n$

$$S(x) = \frac{4\pi^2}{3}+\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi+2}{n}\sin nx\right).$$

c) La fonction S prend la même valeur que f en tout point où cette dernière fonction est continue. En particulier,

$$S(\pi) = \frac{4\pi^2}{3}+\pi+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = f(\pi) = \pi^2+\pi.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

d) Remplaçons cette fois x par 0. Comme f n'est pas continue en ce point,

$$S(0) = \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = 2\pi^2+\pi.$$

D'autre part,

$$S(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

9.13 a) Vu la conduction unilatérale des diodes, le signal de sortie est composé des alternances positives :

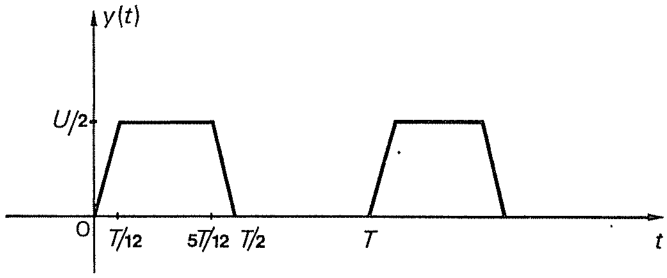


FIG. 9

b) Posons $x = \omega t$. La fonction φ est définie par

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{3U}{\pi} x && \text{si } x \in [0, \pi/6] \\
&= U/2 && \text{si } x \in]\pi/6, 5\pi/6[\\
&= 3U(1 - x/\pi) && \text{si } x \in]5\pi/6, \pi] \\
&= 0 && \text{si } x \in]\pi, 2\pi[.
\end{aligned}$$

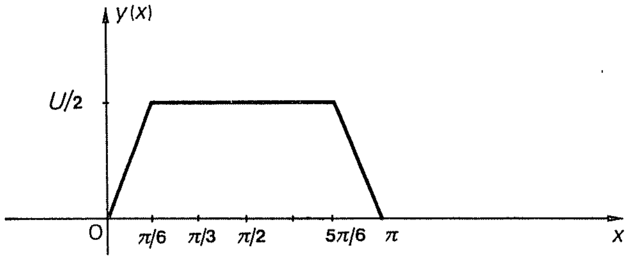


FIG. 10

Considérons φ comme la translatée par $\pi/2$ de la fonction paire h :

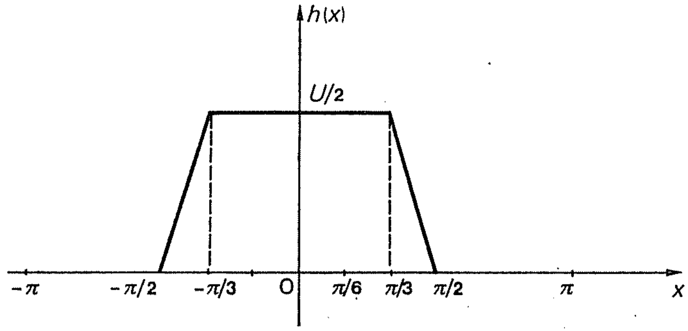


FIG. 11

$$A_0(h) = \frac{5U}{24}, \qquad A_n(h) = \frac{6U}{n^2\pi^2}(\cos n\pi/3 - \cos n\pi/2), \qquad B_n(h) = 0.$$

$$A_0(\varphi) = \frac{5U}{24}, \qquad A_n(\varphi) = \frac{6U}{n^2\pi^2}(\cos n\pi/3 - \cos n\pi/2)\cos n\pi/2$$

$$B_n(\varphi) = \frac{6U}{n^2\pi^2}\cos n\pi/3 \sin n\pi/2.$$

c) $\quad A_3 = 0, \qquad Y_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2} = |B_3| = 2U/3\pi^2.$

9.14 a) La diode D_1 ne conduit pendant l'alternance positive du signal d'entrée qu'à partir de l'instant où la tension à ses bornes est positive, c'est-à-dire lorsque la tension d'entrée est supérieure à E. La diode D_2 reste bloquée tant que u est positive. Pendant l'alternance négative de u, les rôles sont inversés. D'où le graphe de φ :

$$\varphi(t) = E \quad \text{si } t \in [-T/6, T/6], \qquad \varphi(t) = -E \quad \text{si } t \in [T/3, 2T/3],$$

$$\varphi(t) = U\cos\omega t \quad \text{si} \quad t \in]T/6, T/3[\quad \text{ou} \quad \text{si} \quad t \in]2T/3, 5T/6[.$$

$$A_{2p} = 0, \qquad A_1 = U(\sqrt{3}/2\pi + 1/3);$$

$$A_{2p+1} = \frac{U}{\pi}\left[\frac{2\sin(2p+1)\pi/3}{2p+1} + (-1)^p\frac{\sin p\pi/3}{p} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{p+1}\frac{\sin(p+1)\pi/3}{p+1}\right], \qquad B_n = 0.$$

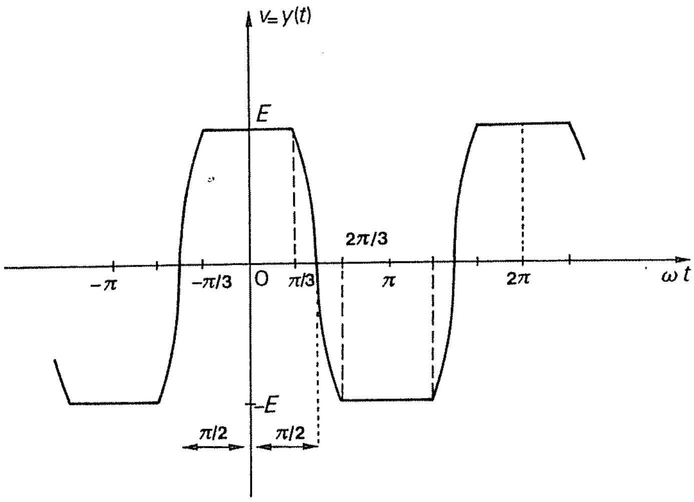


FIG. 12

c) Comme $B_1 = 0$, $Y_1 = |A_1| = U(\sqrt{3}/2\pi + 1/3)$.

d) $v_{1\,\mathrm{eff}} = A_1/\sqrt{2} \sim 43$ volts.

9.15 a)

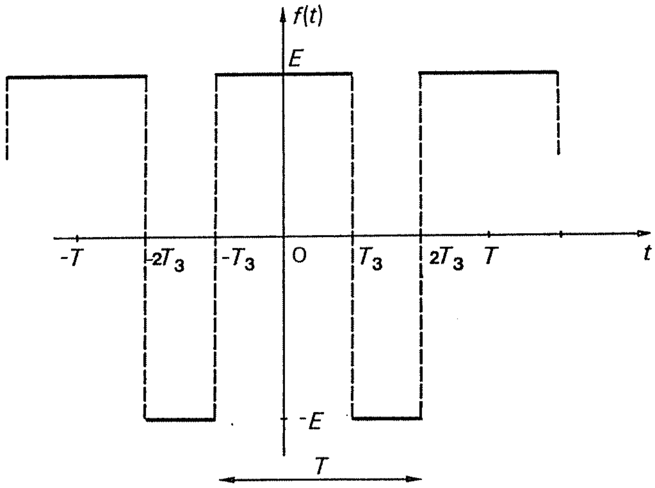


FIG. 13

b) $$S(t) = \frac{E}{3} + \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (3 \sin 2n\pi/3 - \sin 4n\pi/3) \cos n\omega t\,.$$

c) La théorie des nombres complexes appliquée aux quadripôles en régime sinusoïdal (voir tome 1) montre que la fonction de transfert du circuit proposé est

$$\Gamma = \frac{v}{u} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}.$$

Comme chaque composante du signal d'entrée subit cette fonction de transfert, il suffit de remplacer ω par $n\omega$ et de raisonner sur le terme général de la série précédente.

9.16 a)

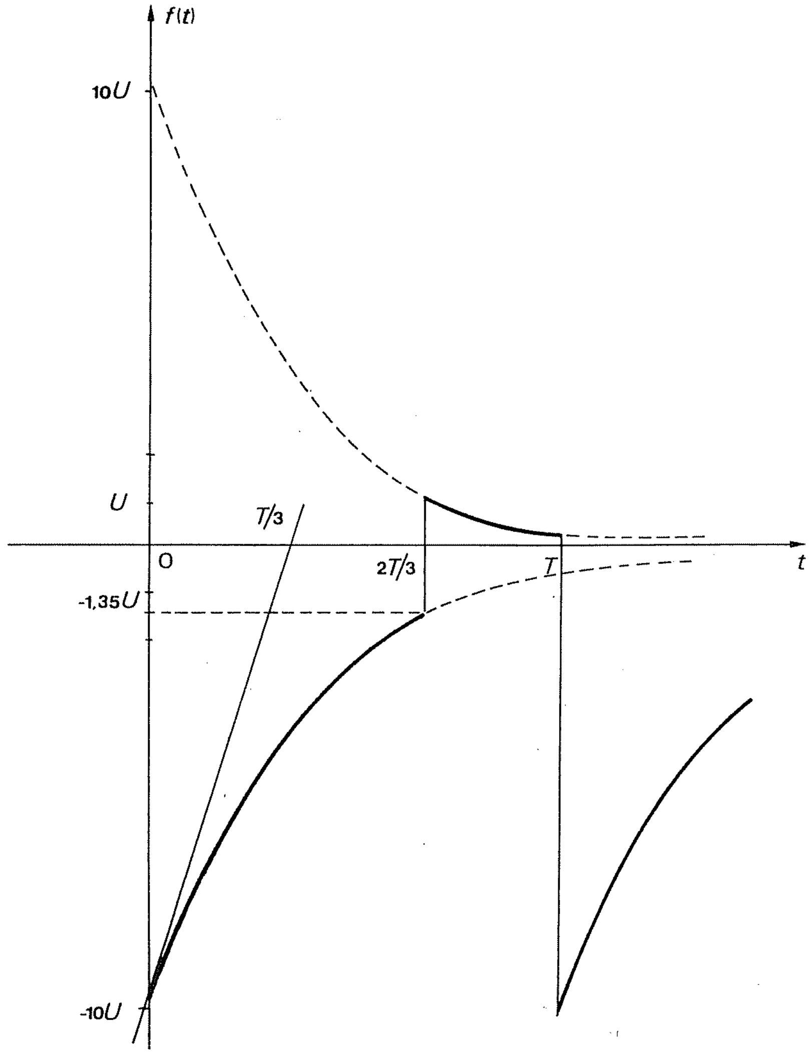


FIG. 14

b) Vu la présence de la diode et son sens de branchement, le courant ne passe que pendant les alternances négatives du signal. L'intensité du courant dans le circuit est définie par

$$\varphi(t) = -10\frac{U}{R}\exp(-t/\theta_1) \qquad \text{si } t \in [0, 2T/3]$$

$$= 0 \qquad \text{si } t \in]2T/3, T[.$$

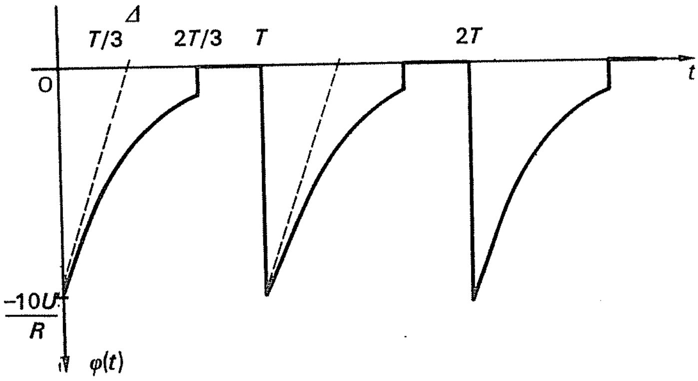


FIG. 15

L'énergie dissipée est

$$W_R = \int_0^{2T/3} R(-10\,U/R)^2 \exp(-2t/\theta_1)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{100\,U^2}{R}\left[-\frac{\theta_1}{2}\exp(-2t/\theta_1)\right]_0^{2T/3} = \frac{-50}{R}U^2\theta_1[\exp(-4T/3\theta_1)-1].$$

L'équation de la tangente montre que $\theta_1 = T/3$; d'où

$$W_R = \frac{50}{3}\frac{U^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-4})\,T \approx \frac{50\,U^2 T}{3R} \approx 16{,}45 \text{ microjoule},$$

puisque $\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}0183$ et que $(1-\mathrm{e}^{-4}) \approx 0{,}9817$.

c) $$C_n = \frac{10\,U}{R(3+\mathrm{j}2n\pi)}\left[\exp\left(-2-\mathrm{j}\frac{4n\pi}{3}\right)-1\right].$$

9.17 $S(t) = \dfrac{E}{2} + \dfrac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2p+1)\pi/4}{2p+1} \cos(2p+1)\omega t.$

La courbe enveloppe du spectre de fréquence a pour équation $y = \dfrac{E}{2}\dfrac{\sin x}{x}$.

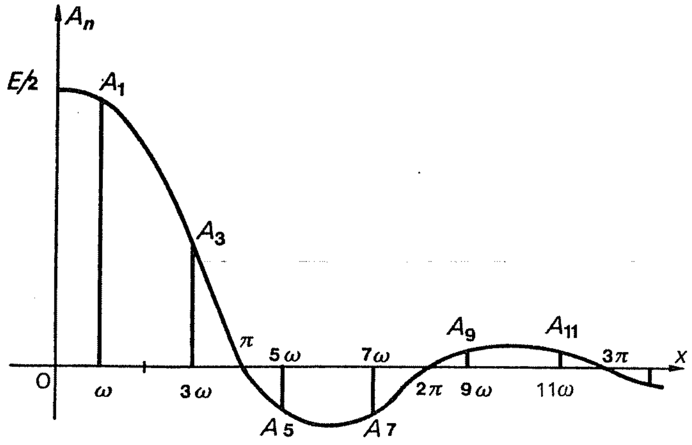


FIG. 16

La première arche ne contient que la fondamentale et l'harmonique trois.

Valeur efficace :

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/8} E^2\,\mathrm{d}t + \int_{T/8}^{3T/8} \frac{E^2}{4}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2E^2}{T}\left(\frac{T}{8} + \frac{1}{4}\left[\frac{3T}{8} - \frac{T}{8}\right]\right) = \frac{3E^2}{8}.$$

Valeur efficace de la fondamentale : $A_{1\text{eff}}^2 = E^2/\pi^2$.

Valeur efficace de l'harmonique trois : $A_{3\text{eff}}^2 = E^2/9\pi^2$.

L'énergie fournie par les deux premières harmoniques est proportionnelle à

$$\left(\frac{E^2}{\pi^2} + \frac{E^2}{9\pi^2}\right) = \frac{10E^2}{9\pi^2}.$$

Celle fournie par le signal est proportionnelle à $(3E^2/8)$ et

$$\frac{W_{1,3}}{W_T} = \frac{10E^2/9\pi^2}{3E^2/8} = \frac{80}{27\pi^2} \approx 0{,}3.$$

PRIMITIVES USUELLES

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et $Q = \pi\mathbf{Z}$.

Fonctions		*Primitives*	*Intervalles*
$(x-c)^n$	$c \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z} - \{-1\}$	$\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$
$(x-a)^\alpha$	$a \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \{-1\}$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a, +\infty[$
$\frac{1}{x-a}$	$a \in \mathbf{R}$	$\ln\|x-a\|$	$\mathbf{R} - \{a\}$
$\frac{1}{x-c}$	$c = a + jb$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$	$\begin{cases} \ln\lvert x-c\rvert + j \operatorname{Arg}(x-c) \\ = \frac{1}{2}\ln[(x-a)^2+b^2] \\ + j \operatorname{Arc\,tg} \frac{x-a}{b} \end{cases}$	$\mathbf{R}$
$\ln x$		$x(\ln x - 1)$	$\mathbf{R}_+^*$
e^{cx}	$c \in \mathbf{C}^*$	$\frac{e^{cx}}{c}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$		$\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$		$-\cos x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{th} x$		$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{coth} x$		$\ln\|\operatorname{sh} x\|$	$\mathbf{R}^*$
$\operatorname{tg} x$		$-\ln\|\cos x\|$	$\mathbf{R} - P$
$\cot x$		$\ln\|\sin x\|$	$\mathbf{R} - Q$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		$\operatorname{th} x$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$		$-\operatorname{coth} x$	$\mathbf{R}^*$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\operatorname{tg} x$	$\mathbf{R} - P$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x$	$\mathbf{R} - Q$

Fonctions		*Primitives*	*Intervalles*
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$		$\begin{cases} 2 \operatorname{Arc\,tg} e^x \\ 2 \operatorname{Arc\,tg} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} = \operatorname{Arc\,tg} \operatorname{sh} x \end{cases}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$		$\ln \left\| \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right\|$	$\mathbf{R}^*$
$\dfrac{1}{\cos x}$		$\ln \left\| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right\|$	$\mathbf{R}-P$
$\dfrac{1}{\sin x}$		$\ln \left\| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right\|$	$\mathbf{R}-Q$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arc\,tg} x$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{x}{a}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Arg\,th} x \\ \dfrac{1}{2} \ln \left\| \dfrac{1+x}{1-x} \right\| \end{cases}$	$]-1, 1[$ $\mathbf{R}-\{-1, 1\}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\| \dfrac{a+x}{a-x} \right\|$	$\mathbf{R}-\{-a, a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arc\,sin} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,cos} x$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\operatorname{Arc\,sin} \dfrac{x}{a}$	$]-a, a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		$\operatorname{Arg\,sh} x = \ln (x+\sqrt{x^2+1})$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\ln (x+\sqrt{x^2+a^2})$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Arg\,ch} x \\ -\operatorname{Arg\,ch}(-x) \\ \ln \|x+\sqrt{x^2-1}\| \end{cases}$	$]1, +\infty[$ $]-\infty, -1[$ $\mathbf{R}-[-1, 1]$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\ln \|x+\sqrt{x^2-a^2}\|$	$\mathbf{R}-[-a, a]$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

Fonctions	*Développements en série entière*	*Rayons de convergence*	
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$+\infty$	
$\operatorname{ch} x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\ldots$	$+\infty$	
$\operatorname{sh} x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\ldots$	$+\infty$	
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\ldots$	$+\infty$	
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\ldots$	$+\infty$	
$(1+x)^\alpha$	$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	1	$\alpha\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$	1	
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	1	
$\operatorname{Arg\,th} x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\ldots$	1	
$\operatorname{Arc\,tg} x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\ldots$	1	

INDEX TERMINOLOGIQUE

Imprimé en France
JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 14059. Dépôt légal : Mai 1985
Dépôt légal de la précédente édition : 4[e] trimestre 1973

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux,* est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

— EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
— AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
— Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides,* en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
— Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistique".

9 782040 060213

ISBN 2-04-006021-9

/85-05